Übungsblatt 2 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 23.-24.10.

Aufgabe 1. Seien X, Y Objekte in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein Objekt Z zusammen mit Morphismen $X \to Z$, $Y \to Z$ heißt *Koprodukt* von X und Y, wenn es die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Zu jedem anderen Objekt Z' mit Morphismen $X \to Z'$, $Y \to Z'$, gibt es einen eindeutigen Morphismus $Z \to Z'$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] \arrow[dr] & \\
Z \arrow[r, dashed] & Z' \\
Y \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(a) Zeigen Sie: Wenn Z, Z' zwei Koprodukte von X und Y sind, so erhalten wir einen Isomorphismus zwischen Z und Z'.[1]

(b) Zeigen Sie durch explizite Beschreibung, dass in den folgenden Kategorien Koprodukte immer existieren:

(1) Ab, die Kategorie der abelschen Gruppen mit Gruppenhomomorphismen.

(2) Top, die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen.

(3) Top_*, die Kategorie der punktierten topologischen Räume mit stetigen, basispunkterhaltenden Abbildungen.

Aufgabe 2. Es bezeichne Grp die Kategorie der (nicht notwendigerweise abelschen) Gruppen mit Gruppenhomomorphismen. Seien G_1, G_2 und G Gruppen, mit Homomorphismen $G_1 \to G$, $G_2 \to G$. Zeigen Sie: Ist G ein Koprodukt von G_1 und G_2 in Grp, so ist G^{ab} ein Koprodukt von G_1^{ab} und G_2^{ab} in Ab.[2] [3]

Aufgabe 3. Für eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist die Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (op für "opposite") definiert als eine Kategorie mit denselben Objekten wie $\mathcal{C}$, aber

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X),$$

mit der umgekehrten Kompositionsvorschrift. Ein *Produkt* von X und Y in $\mathcal{C}$ ist ein Koprodukt von X und Y in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

---

[1] Aus diesem Grund spricht man oft von *dem* Koprodukt von X und Y, wenn eines existiert, und schreibt $X \amalg Y$.

[2] Benutzen Sie ggf. die folgende einfache Umformulierung der universellen Eigenschaft des Koprodukts: Z ist ein Koprodukt von X, Y genau dann wenn für jedes W die Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$ gegeben durch Präkomposition mit $X \to Z$ und $Y \to Z$ eine Bijektion ist.

[3] Man kann zeigen dass Koprodukte in Grp immer existieren, und gegeben sind durch das sog. *freie Produkt* von Gruppen.

Formulieren Sie eine Definition für Produkte in Termen von $\mathcal{C}$ (d.h., ohne sich auf die Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ zu beziehen), und zeigen Sie, dass diese äquivalent zu der obigen ist.

Aufgabe 4. Im Präsenzübungsblatt haben wir gesehen, dass das Komplement $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$ homöomorph zu $\mathbb{C}^n$ ist, was wiederum homöomorph zu einem offenen Ball $\mathring{D}^{2n}$ ist. In dieser Aufgabe wollen wir dieses Resultat verbessern.

Definieren Sie eine Abbildung $f : D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$, die die folgenden drei Eigenschaften hat, und beweisen Sie diese.

(1) Auf dem offenen Ball $\mathring{D}^{2n}$ schränkt f zu einem Homöomorphismus $\mathring{D}^{2n} \cong \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$ ein.

(2) Den Rand ∂D^{2n} bildet f komplett in den Unterraum $\mathbb{C}P^{n-1} \subseteq \mathbb{C}P^n$ ab.

(3) Die Abbildung f induziert einen Homöomorphismus

$$(\mathbb{C}P^{n-1} \sqcup D^{2n})/\sim \; \cong \; \mathbb{C}P^n,$$

wo $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die erzeugt ist davon dass $x \sim f(x)$ für $x \in \partial D^{2n}$.