Übungsblatt 13 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 22.-23.1.

Aufgabe 1. In Blatt 5, Aufgabe 2 haben wir die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\dots \longrightarrow H_*(U \cap V) \longrightarrow H_*(U) \oplus H_*(V) \longrightarrow H_*(U \cup V) \xrightarrow{\delta} H_{*-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

aus dem Ausschneidungsaxiom hergeleitet. Beschreiben Sie, wie man diese stattdessen als lange exakte Sequenz einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen schreiben kann. (Tipp: Theorem 1.16.7)

Aufgabe 2. Für n-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeiten N, M mit gewählten Einbettungen $\mathbb{R}^n \to N$, $\mathbb{R}^n \to M$ definiert man die zusammenhängende Summe

$$N\#M = (N \setminus \mathring{D}^n) \cup_{\partial D^n} (M \setminus \mathring{D}^n),$$

wobei $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$ wie gewohnt die Einheitskreisscheibe ist.

Dabei handelt es sich wiederum um eine kompakte Mannigfaltigkeit.[1]

Zeigen Sie: Wenn n ungerade ist, dann ist $\chi(N\#M) = \chi(N) + \chi(M)$, und wenn n gerade ist, dann ist $\chi(N\#M) = \chi(N) + \chi(M) - 2$.

Was sind die Eulercharakteristiken von $(S^1 \times S^1)^{\#n}$ und $(S^1 \times S^1)^{\#n}\#\mathbb{R}P^2$?

Aufgabe 3. Für zwei Kettenkomplexe C_*, D_* definieren wir ihr Tensorprodukt als

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{k+l=n} C_k \otimes D_l,$$

mit Differential dadurch bestimmt dass für $x \in C_k$ und $y \in D_l$ gelten soll:

$$d_{C\otimes D}(x \otimes y) = (d_C x) \otimes y + (-1)^k x \otimes (d_D y).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(C \otimes D)_*$ mit dem Differential $d_{C\otimes D}$ wirklich ein Kettenkomplex ist.

(b) Konstruieren Sie eine Bijektion zwischen den folgenden beiden Daten:

  (i) Tripel (f, g, H) von Kettenabbildungen f, $g : C_* \to D_*$ und einer Kettenhomotopie H zwischen f und g.

  (ii) Kettenabbildungen $H : (I \otimes C)_* \to D_*$, wobei I_* der Kettenkomplex ist, der gegeben ist durch $I_0 = \mathbb{Z}x_0 \oplus \mathbb{Z}x_1$, $I_1 = \mathbb{Z}i$, $I_k = 0$ sonst, und $di = x_1 - x_0$.[2]

---

[1] Man kann zeigen, dass der Homöomorphietyp von $M\#N$ nicht von der konkreten Wahl der Einbettungen $D^n \to M$, $D^n \to M$ abhängt, nur von deren Orientierung.

[2] Man beachte, dass I_* genau der zelluläre Kettenkomplex von $[0, 1]$ mit der Standard-CW-Struktur ist.

Aufgabe 4. Für zwei graduierte abelsche Gruppen C_*, D_* ist eine *homogene Abbildung von Grad* n gegeben durch Abbildungen $f_i : C_i \to D_{i+n}$ für jedes n. Wir definieren eine graduierte abelsche Gruppe $\mathrm{Hom}(C,D)_*$ indem wir $\mathrm{Hom}(C,D)_n$ als Gruppe der homogenen Abbildungen von Grad n wählen.

Seien jetzt C_*, D_* Kettenkomplexe mit Differentialen d_C, d_D. Dann definieren wir auf $\mathrm{Hom}(C,D)_*$ ein Differential, indem wir für $f \in \mathrm{Hom}(C,D)_n$ setzen:

$$d_{\mathrm{Hom}(C,D)} f = d_D \circ f - (-1)^n f \circ d_C$$

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{Hom}(C,D)_*$ mit Differential $d_{\mathrm{Hom}(C,D)}$ ist wirklich ein Kettenkomplex.

(b) Finden Sie eine Bijektion zwischen $H_0(\mathrm{Hom}(C,D)_*)$ und der Menge der Kettenhomotopieklassen von Kettenabbildungen $C_* \to D_*$.