Übungsblatt 12 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 15.-16.1.

Aufgabe 1. Sei k ein Körper. Beweisen Sie: Für einen endlichen CW-Komplex X gilt

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \dim H_i(X; k).$$

Aufgabe 2. Sei n gerade. Zeigen Sie:

(a) Eine Überlagerungsabbildung $S^n \to X$ für einen endlichen CW-Komplex X ist entweder zweiblättrig oder ein Homöomorphismus.

(b) Eine Überlagerungsabbildung $\mathbb{R}P^n \to X$ für einen endlichen CW-Komplex X ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{Z}[n]$ der Kettenkomplex, der in Grad n durch $\mathbb{Z}$ und in allen anderen Graden durch 0 gegeben ist. Finden Sie eine Bijektion zwischen der Menge der Kettenhomotopieklassen[1] von Abbildungen $\mathbb{Z}[n] \to C_*$, und $H_n(C_*)$.

Aufgabe 4. Sei $\Sigma_g \to \Sigma_h$ eine d-blättrige Überlagerungsabbildung zwischen Flächen vom Geschlecht g und h. Zeigen Sie, dass dann

$$g = d \cdot (h - 1) + 1$$

gilt.

Skizzieren Sie umgekehrt dass für $g = d \cdot (h - 1) + 1$ eine Überlagerungsabbildung $\Sigma_g \to \Sigma_h$ existiert.

[1] d.h. die Menge von Äquivalenzklassen von Abbildungen $\mathbb{Z}[n] \to C_*$, wo $f \sim g$ wenn eine Kettenhomotopie zwischen f und g existiert.