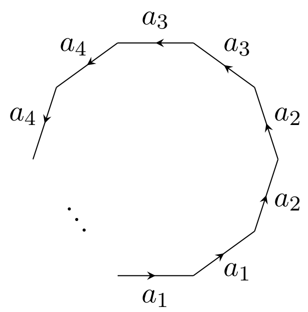
Übungsblatt 10 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 18.-19.12.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Für jedes $d \in \mathbb{Z}$ und jedes $n \geq 1$ existiert eine Abbildung $S^n \to S^n$ von Grad d.

Aufgabe 2. Wir definieren die *unorientierte Fläche von Geschlecht g*, Σ_g^-, indem wir die Seiten eines regelmäßigen $2g$-Ecks wie folgt identifizieren:



Berechnen Sie die Homologiegruppen von Σ_g^- mit $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2$-Koeffizienten.

Aufgabe 3. Für festes $n \geq 1$ und $m \geq 1$, zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es existiert eine Abbildung $f : S^n \to \mathbb{R}^{m+1}$, sodass für alle $x \in S^n$ gilt, dass $f(x) \neq f(-x)$.

(ii) Es existiert eine Abbildung $f : S^n \to S^m$, die mit der Antipodenabbildung kommutiert, also für die $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt.

(iii) Es existiert eine Abbildung $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m$, die einen Isomorphismus auf $H_1(-;\mathbb{Z}/2)$ induziert.

Aufgabe 4.

(a) Für $n, m \geq 1$ sei $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m$ eine Abbildung, die einen Isomorphismus auf $H_1(-;\mathbb{Z}/2)$ induziert. Nutzen Sie die Gysin-Sequenz von Blatt 9, Aufgabe 4, um zu zeigen dass $m \geq n$ und dass f einen Isomorphismus auf $H_k(-;\mathbb{Z}/2)$ für alle $k \leq n$ induziert.

(b) Beweisen Sie nun den Satz von Borsuk-Ulam: Für $n \geq 1$ und eine Abbildung $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ existiert immer ein $x \in S^n$, für das $f(x) = f(-x)$.

(c) **Bonus.** Beweisen Sie das folgende meteorologische Phänomen: Zu jedem Zeitpunkt existieren auf der Erdoberfläche zwei gegenüberliegende Punkte, an denen die gleiche Temperatur sowie der gleiche Luftdruck herrschen. (Sie dürfen annehmen, dass es sich bei der Erdoberfläche um eine S^2 handelt, und dass Temperatur und Luftdruck stetige Funktionen sind.)