Übungsblatt 1 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 16.-17.10.

Aufgabe 1. Die *freie abelsche Gruppe* $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}$ auf einer Menge S ist gegeben durch die Menge aller Funktionen $c : S \to \mathbb{Z}$, sodass $c(s) \neq 0$ nur für endlich viele s. Diese bilden eine abelsche Gruppe durch punktweise Addition. (Man kann sich ein solches c als "formale Linearkombination" $\sum_{s \in S} c(s)s$ vorstellen.)

Beschreiben Sie die kanonische Abbildung $S \to \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}$, und zeigen Sie, dass $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}$ die folgende *universelle Eigenschaft* erfüllt: Für jede abelsche Gruppe A und jede Abbildung von Mengen $S \to A$ existiert eine eindeutige Abbildung von abelschen Gruppen $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \to A$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & A \\ \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe beweisen wir, dass $\pi_1(S^n) = 0$ für $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie, dass folgendes gilt: Für eine offene Überdeckung $[0,1] = U \cup V$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes $0 \leq k < n$ das Intervall $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ ganz in U oder V liegt.

(b) Nun sei X ein Raum mit einer Überdeckung $U \cup V = X$ durch offene Mengen, deren Schnitt $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. Sei $x \in U \cap V$. Beweisen Sie: Jedes Element in $\pi_1(X,x)$ ist ein Produkt von Elementen in den Bildern der induzierten Abbildungen $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ und $\pi_1(V,x) \to \pi_1(X,x)$.

(c) Folgeren Sie, dass $\pi_1(S^n) = 0$ für $n \geq 2$.

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie die folgenden Spezialfälle der *Invarianz der Dimension*: Wenn $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}$, dann ist $m = 1$, und wenn $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^2$, dann ist $m = 2$.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Homöomorphismus $D^2 \xrightarrow{\cong} D^2$ zu einem Homöomorphismus $\partial D^2 \xrightarrow{\cong} \partial D^2$ einschränkt, wobei $\partial D^2 \subseteq D^2$ den Rand der Standard-Scheibe in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Beide Aussagen werden wir mithilfe der Homologie stark verallgemeinern können.

Aufgabe 4. Man betrachte S^3 als die Einheitssphäre in $\mathbb{C}^2$, also als Raum aller $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ mit $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Für $p \geq 1$ eine positive ganze Zahl sei $C_p \subseteq \mathbb{C}^\times$ die Untergruppe aller $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta^p = 1$.

Für $q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu p definieren wir nun eine Wirkung von C_p auf S^3 durch $\zeta \cdot (z_1, z_2) := (\zeta \cdot z_1, \zeta^q \cdot z_2)$. Der Linsenraum $L_{p,q}$ ist definiert als der Quotientenraum S^3/C_p nach dieser Gruppenwirkung.

Zeigen Sie, dass $L_{p,q}$ eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit ist, und berechnen Sie $\pi_1(L_{p,q})$.