

Übungsblatt 9 (Homotopietheorie 1, WS 2019/20)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in der Übungsgruppe am 11.12.

Aufgabe 1. Sei X ein einfach-zusammenhängender punktierter CW-Komplex, und $f : S^n \rightarrow X$ eine punktierte Abbildung. Sei X' der CW-Komplex, der aus X durch Ankleben einer $n + 1$ -Zelle entlang von f entsteht. Zeigen Sie:

- (a) Die induzierten Abbildungen $\pi_i(X) \rightarrow \pi_i(X')$ für $i < n$ sind Isomorphismen.
- (b) Die induzierte Abbildung $\pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X')$ ist surjektiv mit Kern erzeugt von $[f] \in \pi_n(X)$.

Aufgabe 2. Konstruieren Sie ein Beispiel für ein CW-Paar (X, A) , das zeigt dass die Voraussetzung $\pi_1(A) = 0$ im relativen Hurewicz-Theorem notwendig ist. Genauer: Finden Sie (X, A) mit X, A zusammenhängend und $\pi_i(X, A) = 0$ für $i < n$, sodass die Hurewicz-Abbildung

$$\pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$$

kein Isomorphismus ist.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 2$, G eine abelsche Gruppe, und seien X, Y zwei Moore-Räume¹ mit $H_n(X) \cong H_n(Y) \cong G$. Zeigen Sie, dass dann schon eine Homotopieäquivalenz zwischen X und Y existiert.²

Aufgabe 4. Sei X ein einfach-zusammenhängender CW-Komplex, dessen Homologiegruppen endlich erzeugte freie abelsche Gruppen sind. Zeigen Sie, dass X homotopieäquivalent ist zu einem CW-Komplex X' , für den für alle n die Anzahl der n -Zellen gegeben ist durch $\dim H_n(X)$.³

¹Einfach-zusammenhängende Räume deren reduzierte Homologie nur in einem einzigen Grad nicht 0 ist.

²Insbesondere folgt, dass ein einfach-zusammenhängender CW-Komplex mit der Homologie von S^n bereits zu S^n homotopieäquivalent ist.

³Durch eine leichte Modifikation kann man eine ähnliche “minimale” Zellstruktur auch beschreiben wenn die Homologiegruppen nur endlich erzeugt, aber nicht notwendigerweise frei sind.