

Übungsblatt 5 (Homotopietheorie 1, WS 2019/20)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in der Übungsgruppe am 13.11.

Aufgabe 1. Sei K ein punktierter Kankomplex. Zeigen Sie: Zwei punktierte Abbildungen $f, g : \Delta^n / \partial \Delta^n \rightarrow K$ sind genau dann punktiert homotop, wenn es eine Abbildung $h : \Delta^{n+1} \rightarrow K$ gibt, sodass $h|_{\partial_0 \Delta^{n+1}} = f$, $h|_{\partial_1 \Delta^{n+1}} = g$, und $h|_{\partial_i}$ konstant für jedes $i > 1$ ist.

Aufgabe 2. Für eine simpliziale Menge K definieren wir einen Gruppoid¹ $\Pi_1(K)$, dessen Objekte die 0-Simplices von K sind, durch die folgende universelle Eigenschaft: Funktoren $\Pi_1(K) \rightarrow \mathcal{G}$ in einen Gruppoid $\mathcal{G}$ korrespondieren zu Abbildungen $K \rightarrow N(\mathcal{G})$. Zeigen Sie:

- (a) Ist K ein Kankomplex mit Basispunkt x , so ist $\text{Hom}_{\Pi_1(K)}(x, x) \cong \pi_1(K, x)$.
- (b) Ist $A \rightarrow X$ anodyn, so ist $\Pi_1(A) \rightarrow \Pi_1(X)$ eine Äquivalenz von Kategorien.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

- (a) Es existiert ein Funktor $\underline{\text{Hom}} : \text{sSet}^{\text{op}} \times \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}$ mit natürlicher Äquivalenz

$$\text{Hom}_{\text{sSet}}(X, \underline{\text{Hom}}(Y, Z)) \cong \text{Hom}_{\text{sSet}}(X \times Y, Z).$$

- (b) Wenn K ein Kankomplex und X eine beliebige simpliziale Menge ist, so ist $\underline{\text{Hom}}(X, K)$ ebenfalls Kan.

Aufgabe 4. Sei X eine simpliziale Menge. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $X \rightarrow \text{Sing } |X|$ einen Isomorphismus auf Homologie induziert.

¹Eine Kategorie, in der alle Morphismen invertierbar sind