

Übungsblatt 4 (Homotopietheorie 1, WS 2019/20)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in der Übungsgruppe am 06.11.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Die Abbildung $\partial\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ ist nicht anodyn.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Gegeben ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & B \\ & \searrow & \downarrow \\ & & C \end{array}$$

von simplizialen Mengen, in dem alle Abbildungen Inklusionen sind, und $A \rightarrow C$ sowie $A \rightarrow B$ anodyn sind, so ist auch $B \rightarrow C$ anodyn. Zeigen Sie hierzu zunächst dass in der Komposition

$$A \times \Delta^1 \cup B \times \{0\} \hookrightarrow A \times \Delta^1 \cup B \times \{0\} \cup C \times \{1\} \hookrightarrow B \times \Delta^1 \cup C \times \{1\} \hookrightarrow C \times \Delta^1$$

alle Abbildungen anodyn sind.

Aufgabe 3. Sei C_2 die zyklische Gruppe der Ordnung 2. Berechnen Sie die folgenden Homologiegruppen¹ der simplizialen Menge BC_2 :

$$\begin{aligned} H_i(BC_2; \mathbb{Z}) & \text{ für } 0 \leq i \leq 2 \\ H_i(BC_2; \mathbb{Z}/2) & \text{ für } 0 \leq i \leq 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Für eine nichtleere simpliziale Menge X definieren wir den reduzierten Kettenkomplex $\tilde{C}_*(X) = \ker(C_*(X) \rightarrow C_*(\text{pt}))$, und die reduzierte Homologie $\tilde{H}_*(X)$ entsprechend als Homologie davon.

- (a) Zeigen Sie durch eine explizite Ketten-Nullhomotopie, dass $\tilde{H}_*(\Delta^n) = 0$.
- (b) Für eine echte Teilmenge $I \subsetneq [n]$ können wir die unter-simpliziale Menge $\bigcup_{i \in I} \partial_i \Delta^n \subseteq \Delta^n$ formen. Zeigen Sie, dass $\tilde{H}_*(\bigcup_{i \in I} \partial_i \Delta^n) = 0$.
- (c) Berechnen Sie schließlich $\tilde{H}_*(\partial\Delta^n)$.

¹Für simpliziale Mengen können wir Homologie mit Koeffizienten definieren, durch den Kettenkomplex $C_*(X; A) = C_*(X) \otimes A$.