

# Übungsblatt 3 (Homotopietheorie 1, WS 2019/20)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in der Übungsgruppe am 30.10.

**Aufgabe 1.** Für eine simpliziale Menge  $K : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  ist eine unter-simpliziale Menge  $U \subseteq K$  gegeben durch eine Teilmenge  $U_n \subseteq K_n$  für jedes  $n$ , sodass die simplizialen Strukturabbildungen von  $K$  auf  $U$  einschränken.

Zeigen Sie die folgenden alternativen Beschreibungen für die in der Vorlesung definierten simplizialen Mengen  $\partial\Delta^n$  und  $\Lambda_i^n$ :

- (a)  $\partial\Delta^n \subseteq \Delta^n$  ist die minimale unter-simpliziale Menge, die das Bild aller  $\partial^j : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  enthält, und  $\Lambda_i^n \subseteq \Delta^n$  ist die minimale unter-simpliziale Menge, die das Bild aller  $\partial^j : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  für  $j \neq i$  enthält.
- (b)  $\partial\Delta^n \subseteq \Delta^n$  ist die maximale unter-simpliziale Menge, die den  $n$ -Simplex  $\text{id}_{[n]} \in (\Delta^n)_n = \text{Hom}_{\Delta}([n], [n])$  nicht enthält, und  $\Lambda_i^n \subseteq \Delta^n$  ist die maximale unter-simpliziale Menge die den  $n-1$ -Simplex  $\partial^i \in (\Delta^n)_{n-1} = \text{Hom}_{\Delta}([n-1], [n])$  nicht enthält.

**Aufgabe 2.**

- (a) Zeigen Sie, dass  $|\Delta^1 \times \Delta^1|$  homöomorph zum Quadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$  ist. (Tipp: Schreiben Sie  $\Delta^1 \times \Delta^1$  geeignet als Pushout von  $\Delta^n$ s).
- (b) **(Bonus)** Bestimmen Sie  $|\Delta^1 \times \Delta^2|$  analog.

**Aufgabe 3.** Seien  $X$  und  $Y$  zusammenhängende asphärische CW-Komplexe mit  $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ . Zeigen Sie, dass  $X$  und  $Y$  homotopieäquivalent sind. (Tipp: Konstruieren Sie zunächst eine geeignete Abbildung  $X_1 \rightarrow Y$  auf dem 1-Skelett von  $X$ .)

**Aufgabe 4.** Sei  $\gamma \in \pi_1(S^1 \vee S^2)$  ein Erzeuger, und  $\iota : S^2 \rightarrow S^1 \vee S^2$  die Inklusion. Wir definieren einen CW-Komplex  $X$  indem wir an  $S^1 \vee S^2$  eine 3-Zelle entlang von  $2\iota - \iota \cdot \gamma \in \pi_2(S^1 \vee S^2)$  ankleben. Zeigen Sie:

- (a) Die Abbildung  $S^1 \rightarrow X$  induziert einen Isomorphismus auf Homologie und auf  $\pi_1$ .
- (b) Die universelle Überlagerung von  $X$  ist nicht zusammenziehbar. Insbesondere kann  $S^1 \rightarrow X$  keine Homotopieäquivalenz sein. (Tipp: Berechnen Sie  $H_2(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  mithilfe einer expliziten Beschreibung der universellen Überlagerung.)