

Übungsblatt 2 (Homotopietheorie 1, WS 2019/20)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in der Übungsgruppe am 23.10.

Aufgabe 1. Sei $\text{Top}_{2,*}$ die Kategorie der Paare von punktierten topologischen Räumen. Zeigen Sie, dass der Funktor

$$\begin{aligned}\text{Top}_{2,*} &\rightarrow \text{Set}, \\ (X, A) &\mapsto \pi_1(X, A)\end{aligned}$$

nicht durch den Vergissfunktor $\text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ faktorisiert.¹

Aufgabe 2. Für $n \geq 2$ sei $\iota : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ die übliche Quotientenabbildung (wir wählen Basispunkte so, dass ι punktiert ist). Sei $\gamma \in \pi_1(\mathbb{R}P^n)$ das nichttriviale Element. Zeigen Sie, dass $\iota \cdot \gamma = (-1)^{n+1} \iota$ in $\pi_n(\mathbb{R}P^n)$.

Aufgabe 3. Sei (X, A) ein CW-Paar. Beweisen Sie, dass (X, A) die HEP erfüllt.

Aufgabe 4.

- (a) Konstruieren Sie eine natürliche Abbildung $\pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$, und zeigen Sie dass es sich um einen Homomorphismus handelt.
- (b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\pi_{2n-1}(S^n) \oplus \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \pi_{2n-1}(S^n \vee S^n)$ spaltet, und der Kokern ist nichttrivial.

¹Also kann es auf $\pi_1(X, A)$ keine natürliche Gruppenstruktur geben.