

Übungsblatt 11 (Homotopietheorie 1, WS 2019/20)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in der Übungsgruppe am 15.01.

Aufgabe 1. Ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array} \quad (1)$$

in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *schwaches Pullbackdiagramm*, wenn für jedes Z mit kompatiblen Morphismen $Z \rightarrow B$ und $Z \rightarrow C$ eine kompatible Abbildung $Z \rightarrow A$ existiert (nicht notwendigerweise eindeutig!). Zeigen Sie: Wenn $\mathcal{C}$ tatsächliche Pullbacks hat, ist (1) genau dann ein schwaches Pullbackdiagramm, wenn die Abbildung $A \rightarrow B \times_C D$ ein spaltender Epimorphismus ist¹.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: für jede graduierte abelsche Gruppe G_* existiert ein Spektrum E mit Homotopiegruppen $\pi_k E = G_k$ für alle k . Beschreiben Sie die zugehörige Kohomologietheorie.

Aufgabe 3. Beschreiben Sie eine Homotopie, mit der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & \text{pt} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{pt} & \longrightarrow & X \end{array}$$

ein Homotopiepullback ist, sowie eine Homotopie, mit der es kein Homotopiepullback ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Für $n \geq 1$ ist

$$H_*(K(\mathbb{Q}, n); \mathbb{Z}) \cong H_*(K(\mathbb{Q}, n); \mathbb{Q}) \cong H_*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}).$$

(Tipp: Blatt 10, Aufgabe 4.)

¹d.h. ein Rechtsinverses hat