

Übungsblatt 10 (Homotopietheorie 1, WS 2019/20)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in der Übungsgruppe am 18.12.

Aufgabe 1. Sei X ein n -dimensionaler CW-Komplex, $n \geq 1$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} [X, S^n] &\cong [X, K(\mathbb{Z}, n)] \\ [X, \Sigma^{n-1} \mathbb{R}P^m] &\cong [X, K(\mathbb{Z}/2, n)] \text{ für jedes } m \geq 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Unter Benutzung der Aussage, dass $\mathbb{C}P^\infty$ ein $K(\mathbb{Z}, 2)$ ist, zeigen Sie: $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. Seien X, Y punktierte CW-Komplexe, und sei X $(n-1)$ -zusammenhängend und Y $(m-1)$ -zusammenhängend, für $n, m \geq 2$. Beweisen Sie:

$$\begin{aligned} \pi_i(X \vee Y) &\cong \pi_i(X) \oplus \pi_i(Y) \text{ für } i < n + m - 1, \\ \pi_{n+m-1}(X \vee Y) &\cong \pi_{n+m-1}(X) \oplus \pi_{n+m-1}(Y) \oplus (\pi_n(X) \otimes \pi_m(Y)). \end{aligned}$$

(Tipp: Betrachten Sie das Paar $(X \times Y, X \vee Y)$.)

Aufgabe 4. Sei G eine abelsche Gruppe, $n \geq 1$, und k ein Körper.

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$K(G, n) \times K(G, n) \cong K(G \times G, n) \rightarrow K(G, n)$$

die zum Homomorphismus $G \times G \rightarrow G$ korrespondiert, induziert eine Ringstruktur auf $H_*(K(G, n); k)$.

(b) Ein Element von $H_*(K(G, n); k)$ heiße *zerlegbar*, wenn es sich als Summe $\sum x_i \cdot y_i$ schreiben lässt, wo $x_i, y_i \in H_*(K(G, n); k)$ positiven Grad haben, und “ $\cdot$ ” die Produktstruktur aus (a) bezeichnet. Sei l eine ganze Zahl, und sei $[l] : K(G, n) \rightarrow K(G, n)$ die Abbildung, die zur Multiplikation mit l auf G korrespondiert. Beweisen Sie: Für $x \in H_*(K(G, n); k)$ mit positivem Grad ist $[l]_*(x) - lx$ zerlegbar. (Mit anderem Worten: Modulo zerlegbare Elemente ist die von $[l]$ auf Homologie induzierte Abbildung genau Multiplikation mit l .)