Übungsblatt 1 (Homotopietheorie 1, WS 2019/20)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in der Übungsgruppe am 16.10.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Ist G eine topologische Gruppe[1], so ist $\pi_1(G)$ abelsch.

Aufgabe 2. Sei $n \geq 1$. Da $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ gilt, erhalten wir durch Einhängung eine Abbildung

$$\pi_n(X) \to \pi_{n+1}(\Sigma X).$$

Zeigen Sie, dass es sich dabei um einen Gruppenhomomorphismus handelt.

Aufgabe 3. Der durch Homologie definierte Abbildungsgrad liefert eine Abbildung

$$\pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass diese ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist. Wie ist dieser kompatibel mit dem Homomorphismus aus Aufgabe 2?

Aufgabe 4. Sei X ein punktierter zusammenhängender CW-Komplex. Auf der Menge $\pi_n(X)$ haben wir in der Vorlesung eine $\pi_1(X)$-Wirkung konstruiert. Auf $[S^n, \widetilde{X}]$, der Menge der unpunktierten Homotopieklassen von Abbildungen in die universelle Überlagerung von X, haben wir ebenfalls eine Wirkung von $\pi_1(X)$, durch Decktransformationen. Beweisen Sie die Existenz einer $\pi_1(X)$-äquivarianten Bijektion

$$\pi_n(X) \cong [S^n, \widetilde{X}].$$

[1] Ein topologischer Raum mit stetiger Gruppenstruktur