Prof. Dr. Thomas Nikolaus
Stefano Ariotta

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1 Sei $f : X \to Y$ eine offene, diskrete stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Beweisen Sie, dass f ist unverzweigt genau dann, wenn f eine lokaler Homömorphismus ist. (Beachten Sie, dass das wurde in der Vorlesung beweisen für f holomorphe Abbildung zwischen Riemannsche Flächen.)

[4]

Aufgabe 2 Sei p, $q \in \mathbb{C}$, und $p \neq q$. Beweisen Sie, dass

$$X := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \ w^2 = (z - p)(z - q)\}$$

homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{P}^1$ ist.
Hinweis: Versuchen Sie, die Zuordnung

$$z \mapsto \sqrt{\frac{z-p}{z-q}}$$

als eine (wohldefiniert) Funktion $\mathbb{P}^1 \to X$ zu schreiben. Sie sollten die Übung machen, ohne eine Wahl zu treffen.

[4]

Aufgabe 3 Sei X und Y Riemannsche Flächen, und $f : X \to Y$ eine holomorph Abbildung. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(1) f ist eine Überlagerung;
(2) f ist unverzweigt und hat die Kurvenliftungs-Eigenschaft;
(3) f hat die Kurvenliftungs-Eigenschaft.

Erinnerung: Eine Abbildung $f : X \to Y$ besitzt die Kurvenliftungs-Eigenschaft, wenn zu jeder Kurve $\gamma : [0, 1] \to Y$ und jedem Punkt $\overline{x} \in X$ mit $f(x) = \gamma(0)$ es eine einzige Liftung $\overline{\gamma} : [0, 1] \to X$ von γ mit $\overline{\gamma}(0) = \overline{x}$ gibt.

[4]

Aufgabe 4 Sei

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$. Sei $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$, $S_0 = S^2 \setminus \{N\}$ und $S_\infty = \setminus\{S\}$. Wir definieren die *stereographischen Projektionen* als

$$\varphi : S_0 \to \mathbb{C}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{x + \mathrm{i}y}{1 - z}$$

und

$$\psi : S_\infty \to \mathbb{C}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{x - \mathrm{i}y}{1 + z}.$$

(1) Beweisen Sie, dass $\varphi \circ \psi^{-1} = 1/z$ und $\psi \circ \varphi^{-1} = 1/z$ für alle komplexen $z \neq 0$.
(2) Beweisen Sie, dass $\mathcal{A} = \{(S_0, \varphi),\ (S_\infty, \psi)\}$ ist ein komplexer Atlas für S^2.
(3) Beweisen Sie, dass die Riemannsche fläche bestimmt durch $\mathcal{A}$ als die Riemannsche Zahlenkugel (wie beschrieben als in die Vorlesung) bihilomorph ist. (Zeichnungsbilder der stereographischen Projektionen kann hilfreich sein.)

[1+2+1]