Prof. Dr. Thomas Nikolaus
Stefano Ariotta

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 Angenommen, $p_1, \ldots, p_n$ sind Punkte auf einer kompakten Riemannschen Fläche X, und $X' = X \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$. Angenommen,

$$f : X' \to \mathbb{C}$$

ist eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Beweisen Sie, dass das Bild von f dich in $\mathbb{C}$ ist.

[4]

Aufgabe 2 Sei Γ ein Gitter. Wir definieren die Weierstraßsche $\wp$-Funktion bezüglich Γ als

$$\wp_\Gamma(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma \setminus 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

(1) Beweisen sie, dass $\wp_\Gamma$ eine meromorphe Abbildung $\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}^1$ induziert, mit nur einem Pol an dem Punkt der Γ entspricht. [Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Ableitung $\wp'_\Gamma(z)$.]

(2) Sei $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ mit einzigem Pol bei 0, und mit der folgende Laurentreihenentwicklung um 0 (d.h. in einer standard Karte um 0)

$$f(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} c_k z^k, \quad \text{mit } c_{-2} = 1,\ c_{-1} = c_0 = 0.$$

Beweisen sie, dass $f = \wp_\Gamma$.

[2+2]

Aufgabe 3 Beweisen sie, dass jede meromorphe Funktion f auf $\mathbb{P}^1$ eine rationale Funktion ist, d.h. ein Quotient von Polynomen.

[4]

Aufgabe 4 Sei X eine Riemannsche Fläche und $f \in \mathscr{M}(X)$ eine meromorphe Funktion. Für eine Karte $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{C}$ mit $u \in U$ entspricht $0 \in V$ sei

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k$$

die Laurentreihenentwicklung um 0 in diese Karte. Bestimmen Sie, welche der folgenden Eigenschaften nur von f abhängen, also unabhängig von der Wahl der Karte sind.

(1) eine Nullstelle der Ordnung n sein;
(2) ein Pol der Ordnung n sein;
(3) $a_k = 0$ für ein festes $k \in \mathbb{Z}$.

[1+1+2]