Prof. Dr. Thomas Nikolaus
Stefano Ariotta

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1 Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale. Hierbei meinen wir mit $|z-a| = r$ den geschlossenen Weg $\gamma(t) = a + r\exp(\mathrm{i}t)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

(1) $\int_{|z+1|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)(z-1)^3}$
(2) $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}} \mathrm{d}z$
(3) $\int_{|z+2\mathrm{i}|=3} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+\pi^2}$

[1+1+2]

Aufgabe 2 Beweisen Sie die Existenz der folgenden bestimmten Integrale und berechnen Sie diese mit Hilfe des Residuensatzes:

(1) $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{a+\cos^2 x}$ für $a > 0$.
(2) $\int_0^\infty \frac{x^4}{x^6+1}\ \mathrm{d}x$.
(3) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$ für $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.
(4) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} \mathrm{d}x$ für $a > 0$.

[1+1+1+1]

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die Art der Singularität und das Residuum der Funktion f im angegebenen Punkt a.

(1) $f(z) = \frac{z^3+3z-2\mathrm{i}}{z^2+1}$ an der Stelle $a = \mathrm{i}$.
(2) $f(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z-1}$ an den Stellen $a = 2\pi\mathrm{i}k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
(3) $f(z) = \exp\big(\exp(-\frac{1}{z})\big)$ an der Stelle $a = 0$.

[1+1+2]

Aufgabe 4 (Satz von Morera) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und

$$f : U \to \mathbb{C}$$

stetig. Für jeden Dreiecksweg Δ, so dass die konvexe Hülle der drei Ecken von Δ in U enthalten ist, sei

$$\int_\Delta f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

Beweisen Sie, dann ist f stetig komplex differenzierbar.

Hinweis: Beweisen Sie es für einen offenen Ball, der in U enthalten ist. Schreiben Sie f als Ableitung einer (notwendigerweise) stetig differenzierbaren Funktion.

Bemerkung: Es folgt aus diesem Satz, und dem Cauchy-Goursat Lemma, dass jede komplex differenzierbare Funktion analytisch ist.

[4]