Prof. Dr. Thomas Nikolaus
Stefano Ariotta

Aufgabenblatt 5

Das Ziel diese Übungsblattes ist es, das folgende Lemma zu beweisen.

Lemma 1 (Cauchy-Goursat Lemma) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung (wie in der Vorlesung definiert, ohne die Anforderung an stetige Differenzierbarkeit). Sei Δ ein Dreiecksweg in U (d.h. ein Pfad, der aus drei Segmenten besteht, die drei Punkte in U verbinden), so dass die konvexe Hülle der drei Ecken von Δ in U enthalten ist. Dann gilt

$$\int_{\Delta} f \, \mathrm{d}z = 0.$$

Aufgabe 1 Seien Δ_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Dreieckswege, die die Mittelpunkte der Seiten von Δ verbinden. Beweisen sie, dass ein $\Delta_i =: \Delta^{(1)}$ existiert, so dass

$$\left| \int_{\Delta_i} f \, \mathrm{d}z \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\Delta} f \, \mathrm{d}z \right|.$$

[4]

Aufgabe 2 Durch Wiederholung der Konstruktion von Aufgabe 1, erhalten sie eine Sequenz von verschachtelten Dreiecken $\Delta \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \cdots$. Beweisen Sie, es existiert ein eindeutiger Punkt z^*, der in jedem $\Delta^{(n)}$ enthalten ist.

[4]

Aufgabe 3 (Beweis des Cauchy-Goursat Lemma)

(1) Beweisen sie, dass $\int_{\Delta^{(n)}} f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*) \, \mathrm{d}z = \int_{\Delta^{(n)}} f(z) \, \mathrm{d}z$.

(2) Beweisen sie, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass wenn $z \in D_\delta(z^*)$, dann

$$|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| < \epsilon |z - z^*|.$$

(3) Beweisen sie, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_{\Delta} f \, \mathrm{d}z \right| \leq \left| \int_{\Delta^{(n)}} f \, \mathrm{d}z \right| \leq \epsilon \cdot \frac{\mathrm{Umfang}(\Delta)^2}{4^n}.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, beweist dies das Cauchy-Goursat-Lemma.

[1+1+2]