Prof. Dr. Thomas Nikolaus
Stefano Ariotta

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (1) Beweisen sie, dass "homotop sein" und "weghomotop sein" Äquivalenzrelationen sind.
(2) Beweisen sie, dass die Klasse der stückweise differenzierbaren Kurven geschlossen unter Entgegensetzung und Aneinanderreihung ist.

[2+2]

Aufgabe 2 (1) Berechnen sie
$$\int_\gamma \sin z \ \mathrm{d}z$$
wobei
$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t - \mathrm{i}t^2$$
ist.
(2) Hat die folgende Funktion auf dem angegebenen Definitionsbereich eine komplexe Stammfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{\sin(z)}{z} \quad f(0) = 1$$

[2+2]

Aufgabe 3 (1) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen gesetzt, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und $\gamma_1, \gamma_2 : I \to U$ (so dass $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$) stückweise differenzierbare homotope Pfade (durch eine Homotopie, die die Endpunkte fixiert).
Zeigen sie, dass
$$\int_{\gamma_1} f \ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f \ \mathrm{d}z.$$
(2) Ist das wahr, wenn die Homotopie die Endpunkte nicht fixiert? (Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.)

[2+2]

Aufgabe 4 (1) Zeigen Sie, dass ein topologische Raum X genau dann einfach zusammenhängend ist (i.e. jede kontinuierliche Schleife durch eine Homotopie von Schleifen homotop zu einer konstanten Schleife ist), wenn jede kontinuierliche Schleife durch eine Pfadhomotopie von Schleifen homotop zu einer konstanten Schleife ist (i.e. durch eine Homotopie der Basispunkt fixiert).
(2) Zeigen Sie, dass sternförmigen Mengen in $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängenden sind.

[2+2]