Prof. Dr. Thomas Nikolaus
Stefano Ariotta

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1 Beweisen sie, dass eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend ist, genau dann wenn $\mathcal{O}(U)$ ein Integritätsring ist.

[4]

Aufgabe 2 Beweisen sie, dass $1/z : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ eine analytische Abbildung ist.

[4]

Aufgabe 3 Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Sei ln der Hauptwert des Logarithmus und $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

(1) $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$

(2) $\frac{1}{2} \left(\ln(1-z)\right)^2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{s_n}{n+1} z^{n+1}$

(sie dürfen nur die Definition von ln als Invers das exp als der Vorlesung benutzen).

[2+2]

Aufgabe 4 Seien $R_1, R_2 > 0$ die Konvergenzradien der Reihen $\sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ und $\sum_{n=1}^\infty b_n z^n$. Beweisen sie:

(1) Sei R der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n z^n$. Dann $R \geq R_1 R_2$.

(2) Für den Fall, dass $a_n \neq 0$ für alle n, sei R der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^\infty a_n^{-1} z^n$. Dann $R \leq R_1^{-1}$. Geben sie ein Beispiel mit $R < R_1^{-1}$.

[1+3]