Prof. Dr. Thomas Nikolaus
Stefano Ariotta

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1 (1) Sei $F := \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ die universelle Überlagerung von $\mathbb{C}^\times$ und sei $\omega := \frac{1}{z}\mathrm{d}z$ über $\mathbb{C}^\times$. Bestimmen Sie $F^*(\omega)$.

(2) Sei $F := \tan : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ und sei $\omega := \frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z$ über $\mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$. Zeigen Sie, dass ω zu einer holomorphen 1-Form auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$ erweitert werden kann und bestimmen Sie $F^*(\omega)$.

[2+2]

Aufgabe 2 (1) Zeigen Sie, dass jede holomorphe 1-Form auf $\mathbb{P}^1$ identisch 0 ist.

(2) Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Nutzen sie Teil (1), um zu zeigen, dass jede holomorphe Abbildung $F : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}/\Lambda$ konstant ist.

(3) Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und sei $\Omega^1(\mathbb{C}/\Lambda)$ der Vektorraum der holomorphen 1-Formen auf dem Torus $\mathbb{C}/\Lambda$. Zeigen Sie, dass $\dim \Omega^1(\mathbb{C}/\Lambda) = 1$.

[1+2+1]

Aufgabe 3 Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf einem topologischen Raum X, und seien $s, t \in \mathcal{F}(U)$ zwei Schnitte auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$. Beweisen Sie, dass die Menge $\{x \in U \mid s_x = t_x \text{ in } \mathcal{F}_x\}$ eine offene Teilmenge von U ist. Falls $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppe ist, definiert man den Träger $\mathrm{supp}(s)$ eines Schnittes $s \in F(U)$ wie folgt

$$\mathrm{supp}(s) := \{x \in U \mid 0 \neq s_x \in \mathcal{F}_x\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{supp}(s)$ eine abgeschlossene Teilmenge von U ist.

[4]

Aufgabe 4 Sei $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Für jede Garbe abelscher Gruppe $\mathcal{F}$ auf X definiert man für jede offene Teilmege $U \subseteq X$ die Untergruppe

$$\Gamma_{Z\cap U}(U, \mathcal{F}) := \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \mathrm{supp}(s) \subseteq Z \cap U\}.$$

Beweisen Sie, dass dies eine Garbe (bezeichnet $H^0_Z(\mathcal{F})$) definiert.
(Eine Garbe $\mathcal{F}$ soll auf Z getragen werden, falls $H^0_Z(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.)

[4]