Prof. Dr. Thomas Nikolaus
Stefano Ariotta

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1 Seien X ein topologischer Raum und G eine abelsche Gruppe G.

(1) Beweisen Sie, dass die Prägarbe
$$\begin{aligned} \mathcal{T}(X) &\to \mathbf{Set} \\ U &\mapsto \{f : U \to G \mid \text{konstant}\} \end{aligned}$$
mit den offensichtlichen Restriktionsmorphismen, ist keine Garbe.

(2) Beweisen Sie, dass die Prägarbe
$$\begin{aligned} \mathcal{T}(X) &\to \mathbf{Set} \\ U &\mapsto \{f : U \to G \mid \text{konstant auf Zusammenhangskomponenten}\} \end{aligned}$$
mit den offensichtlichen Restriktionsmorphismen, ist eine Garbe.

(3) Beweisen Sie, dass die Prägarbe
$$\begin{aligned} \mathcal{T}(X) &\to \mathbf{Set} \\ U &\mapsto \{f : U \to \mathbb{R} \mid \text{stetig}\} \end{aligned}$$
mit den offensichtlichen Restriktionsmorphismen, ist eine Garbe.

[1+1+2]

Aufgabe 2 (1) Seien X und Y zwei Riemannsche Flächen, sei $p : Y \to X$ eine unverzweigte holomorphe Überlagerung und sei $f : Y \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Seien ferner $b \in Y$, $a := p(b)$ und $\varphi := p_*(f_b) \in \mathcal{O}_a$. Zeigen Sie, dass (Y, p, f, b) eine maximale analytische Fortsetzung ist, genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für je zwei verschiende Punkte $x, y \in p^{-1}(a)$ sind die Keime $p_*(f_x)$ und $p_*(f_y)$ verschieden.

(2) Seien X eine Riemannsche Fläche, $Y \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : Y \to X$ eine unverzweigte holomorphe Überlagerung und $b \in Y$. Dann gibt es Umbegungen V von b in Y und U von $f(b)$ in X, sodass $f|_V : V \to U$ biholomorph ist. Bestimmen Sie eine maximale analytische Fortsetzung der Umkehrabbildung
$$\left((f|_V)^{-1}\right)_{f(b)} \in \mathcal{O}_{f(b)}.$$

[2+2]

Aufgabe 3 (1) Sei (Y, p, f, b) die maximale analytische Fortsetzung des Logarithmus über $\mathbb{C}^\times$. Zeigen Sie, dass Y biholomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

(2) Sei (Y, p, f, b) die maximale analytische Fortsetzung der k-ten Wurzel über $\mathbb{C}^\times$. Zeigen Sie, dass Y biholomorph zu $\mathbb{C}^\times$ ist.

[2+2]

Definition Seien X ein topologischer Raum X, und $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf X. Ein *Morphismus* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben besteht aus einer natürlichen Transformation zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, i.e. aus eine Familie von Morphismen abelscher Gruppen (oder von Mengen, usw.) $\{\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\}_{U \in \mathcal{T}(X)}$ so dass für jedes Paar V und U von offenen Unterräumen von X mit $V \subseteq U$, das folgende Diagramm kommutiert
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "(\rho_{\mathcal{F}})^U_V"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "(\rho_{\mathcal{G}})^U_V"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathcal{G}(V). \end{tikzcd}$$

Ein Morphismus von Garben ist nur ein Morphismus von Prägarben zwischen zwei Garben.

Aufgabe 4 Seien $X = \mathbb{C}^\times$, $\mathcal{O}$ die Garbe holomorpher Funktionen auf X und $\mathcal{O}^\times$ die Garbe holomorpher Funktionen ohne Nullstellen.

(1) Beweisen Sie, dass die Exponentialfunktion definiert einen Morphismus von Garben (von abelschen Gruppen)

$$\exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\times$$

mit $\mathrm{exp_U : f \mapsto exp(f)}$.

(2) Finden Sie eine Basis für die Topologie von X, so dass $\exp_U$ für alle U in dieser Basis surjektiv ist. Beachten Sie, dass $\exp_X$ nicht surjektiv ist.

(3) Beschreibe den Kernel von $\exp_U$ für U in der im vorherigen Stufe ermittelten Basis.

Bonusfrage (keine Punkte) Können Sie den Kern von exp als einen Morphismus von Garben erraten?

[1+2+1]