Prof. Dr. Thomas Nikolaus
Stefano Ariotta

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1 Bestimmen Sie, welche der folgenden Riemannschen Flächen isomorph (d.h. biholomorph äquivalent) sind (und welche nicht):

(1) $\mathbb{C}$;
(2) Der Einheitsball $D_0(1) \subset \mathbb{C}$;
(3) Die oberen Halbebene $\mathbb{H}$;
(4) $\mathbb{P}^1$;
(5) Der Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ (für einige Gitter Γ).

Hinweis: schauen Sie das Blatt 1 an.

[4]

Aufgabe 2 (1) Beweisen Sie, dass jede meromorphe Funktion $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ ist rational.

(2) Sei
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}).$$
Zeigen Sie, dass die Möbiustransformation
$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$
zu einer biholomorphen Funktion $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ erweitert werden kann.

(3) Zeigen Sie umgekehrt, dass jede biholomorphe Abbildung $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ durch eine Möbiustransformation gegeben ist.

[1+1+2]

Aufgabe 3 Sei X und Y Zusammenhängende Riemannsche Flächen, und sei $f : X \to Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung, und
$$f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X), \quad f^*(\varphi) := \varphi \circ f.$$
Zeigen Sie, dass f^* ein injektiven Ringhomomorphismus ist.

[4]

Aufgabe 4 Sei X eine kompakte riemannsche Fläche und seien $f, g \in \mathcal{M}(X)^\times$ zwei meromorphe Funktionen mit den gleichen Null- und Polstellen (mit Vielfachheit gezählt). Zeigen Sie, dass es ein $c \in \mathbb{C}^\times$ mit $f = c \cdot g$ gibt.

[4]