

## Aufgabenblatt 1

**Aufgabe 1** Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung s.d.

- (1)  $f$  ist stetig
- (2)  $f(w+z) = f(w) + f(z)$
- (3)  $f(wz) = f(w)f(z)$ , und  $f(1) \neq 0$ .

Zeigen sie:  $f : z \mapsto z$  oder  $f : z \mapsto \bar{z}$ .

*Bemerkung:* Eigenschaften (2) und (3) bedeuten dass  $f$  ein Körperendomorphismus ist. Man kann zeigen, dass  $\mathbb{C}$  überabzählbar viele solche Körperendomorphismen besitzt. Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  hingegen haben nur die Identität als Körperendomorphismus.

[4]

**Aufgabe 2** Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} H : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow M(2 \times 2, \mathbb{C}) \\ (z, w) &\mapsto \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und bezeichnen ihr Bild mit  $\mathcal{H}$ . Man zeige, dass  $\mathcal{H}$  ein Schiefkörper ist, d.h. in  $\mathcal{H}$  gelten alle Axiome eines Körpers mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation.

Bemerkung: Man nennt  $\mathcal{H}$  den Schiefkörper der Hamiltonschen Quaternionen.

[4]

**Aufgabe 3** Sei  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$  die komplexe obere Halbebene. Betrachten Sie die Cayley-Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

- (1) Zeigen Sie:  $f$  ist injektiv.
- (2) Bestimmen Sie das Bild von  $f$ .

[2+2]

**Aufgabe 4** Sei  $X$  ein topologischen Raum, und  $x \in X$ . Die Zusammenhangskomponente von  $x$  ist der Vereinigung all derjenigen zusammenhängenden Teilmengen, welche diesen Punkt enthalten. Wir definieren zwei Äquivalenzrelationen:

- $x \sim y$  falls die Zusammenhangskomponente von  $x$  und die Zusammenhangskomponente von  $y$  gleich sind.
- $x \sim_p y$  falls es gibt einen Pfad  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ .

Zeigen sie:

- (1) Beides sind Äquivalenzrelationen. (Die Äquivalenzklassen werden Zusammenhangskomponenten bzw. Pfadzusammenhangskomponenten genannt).
- (2) Zusammenhangskomponenten sind zusammenhängend und abgeschlossen, Pfadzusammenhangskomponenten sind pfadzusammenhängend.
- (3) Pfadzusammenhangskomponenten sind zusammenhängend.

Warnung: Zusammenhangskomponenten sind im Allgemeinen nicht pfadzusammenhängend.

[1+2+1]