Prof. Dr. Thomas Nikolaus
Stefano Ariotta

Aufgabenblatt 0

Aufgabe 1
(1) Rechnen Sie nach, dass die komplexe Konjugation einen Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ definiert.
(2) Zeigen Sie durch Nachrechnen
$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}) \,.$$
(3) Seien $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ und sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit
$$a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_n z_0^n = 0 \ .$$
Zeigen Sie, dass dann auch
$$a_0 + a_1 \overline{z}_0 + \ldots + a_n \overline{z}_0^n = 0$$
gilt.

Aufgabe 2 Jede komplexwertige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in einer komplexen Variable kann auch als Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}_1(x, y) + \mathrm{i}\tilde{f}_2(x, y)$$
gesehen werden. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen
$$\partial_x \tilde{f}_1 \,, \quad \partial_y \tilde{f}_2 \,, \quad \partial_x \tilde{f}_2 \,, \quad \partial_y \tilde{f}_1$$
für die folgenden Funktionen
$$f(z) = z \quad f(z) = z^2 \quad f(z) = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z)} \left(\cos(\operatorname{Im}(z)) + \mathrm{i}\sin(\operatorname{Im}(z))\right)$$
Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 3 Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar und skizziere sie in der komplexen Zahlenebene:
(1) i^n, Zeichnung für $n = -1, 0, 1, 2, 3$ und $n = 117$.
(2) $(1 + \mathrm{i})^6$
(3) $\frac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

Aufgabe 4 Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen sie:
(1) Die Unterraumtopologie ist eine Topologie.
(2) Die Inklusion $\iota : M \hookrightarrow X$ is stetig.
(3) Eine Abbildung $f : Y \to M$ ist stetig, genau dann wenn die Komposition
$$Y \xrightarrow{f} M \xhookrightarrow{\iota} X$$
stetig ist.
(4) Beweisen sie, dass (2) und (3) die Unterraumtopologie eindeutig fest legt.

Aufgabe 5 Man gebe alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ an. Hinweis: Benutzen Sie die Polardarstellung.