Seminar “Kompakte Lie Gruppen”

Johannes Ebert, Thomas Nikolaus

In diesem Seminar werden wir kompakte Lie Gruppen studieren. Eine Lie Gruppe ist eine Gruppe, die gleichzeitig eine glatte Mannigfaltigkeit ist sodass die Gruppenoperationen differenzierbar sind. Beispiele sind die klassischen Matrixgruppen wie $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ oder $\mathrm{O}(n)$. Diese spielen in vielen Bereichen der Mathematik und Physik eine zentrale Rolle und kommen in verschiedenen Gebieten und Anwendung zum Einsatz. Für kompakte Lie Gruppen existiert eine sehr schöne und reiche Strukturtheorie, welche wir in diesem Seminar besprechen wollen. Zum Beispiel kann man anhand von einfachen algebraischen Daten die einer Lie Gruppe zuhgeordnet werden (sogennanten Wurzelsystemen) eine vollständige Klassifikation geben und zahlreiche Eigenschaften der Lie Gruppen direkt ablesen. Wir werden im Wesentlichen nach dem Buch [BtD85] von Bröcker und tom Dieck vorgehen.

Das Seminar richtet sich an Bachelor-Studierende und Master-Studierende die die Vorlesung Topologie 1 gehört haben oder anderweitig Vorkenntnisse in Topologie besitzen. Im Zweifel sprechen Sie uns gerne an, im Prinzip sollte man dem Seminar auch mit weniger Vorwissen gut folgen können. Die Vorträge sollen auf 80 Minuten konzipiert werden, damit Zeit für Diskussionen, Fragen und Ergänzungen bleibt. Geben Sie uns bitte 10 Tage vor dem Termin Ihres Vortrags eine grobe (handschriftliche) Ausarbeitung ab und besprechen Sie den Vortrag anschließend mit uns.

Es gibt ein paar Vorträge die etwas anspruchsvoller sind und etwas mehr Überblicksart angelegt sind (Vortrag 4, 7 und 15). Diese sollten sie in enger Absprache mit uns konzipieren. Schreiben Sie gerne eine E-Mail mit ihrem Wunschthema (oder bessere mehreren) an nikolaus@wwu.de. Auch bei anderen Fragen stehen wir Ihnen jederzeit gerne zur Verfügung. Die bereits vergebenen Vorträge sind gelb und der Namen in der Klammer. Falls wir den Rest nichtmehr auffüllen können werden wir die enstprechenden Vorträge überhnehmen, sodass das Seminar auf jeden Fall stattfindet und alle Themen behandelt.

Melden Sie sich bitte auch im Learnweb (Einschreibeschlüssel “Lie”) an.

Liegruppen und Liealgebren

Vortrag 1 (Liegruppen)**.** Definition einer Liegruppe, die klassischen Beispiele $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$. Wiederholung Tangentialraum und Tangentialbündel. Vektorfelder, 1-Parameteruntergruppen. Quelle: [BtD85, §I.1, §I.2 bis einschließlich S. 17].

Vortrag 2 (Liealgebra und Exponentialabbildung)**.** Liealgebra einer Liegruppe, Liealgebren der klassischen Liegruppen. Exponentialabbildung und Anwendungen. Quelle: [BtD85, S. 18-30].

Vortrag 3 (Quotientengruppen und Überlagerungen)**.** Für eine Lieuntergruppe $H \subseteq G$ ist der Quotientenraum G/H eine Mannigfaltigkeit, und eine Liegruppe, falls $H \subseteq G$ normal ist. Außerdem soll darauf eingegangen werden, dass dass die universelle Überlagerung einer Liegruppe wieder eine Liegruppe ist. Als Beispiele bieten sich die sogenannten exzeptionellen Isomorphismen

$$\begin{aligned}\mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\} &\cong \mathrm{SO}(3),\\ (\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2))/\{\pm 1\} &\cong \mathrm{SO}(4),\\ \mathrm{Sp}(2)/\{\pm 1\} &\cong \mathrm{SO}(5),\\ \mathrm{SU}(4)/\{\pm 1\} &\cong \mathrm{SO}(6)\end{aligned}$$

an. Quelle: [BtD85, §I.4, ohne Theorem 4.13], [KJ08, §2.1].

Vortrag 4 (**Bröring**, Liegruppen-Liealgebren-Korrespondenz)**.** In diesem Vortrag soll die Korrespondenz zwischen Liegruppen und Liealgebren besprochen werden, wobei detailierte Beweise nicht gegeben werden können. Quellen sind zum Beispiel [DK12, Section 1.14] und [War13, Section 3].

Darstellungen kompakter Liegruppen

Vortrag 5 (Röttger). Grundbegriffe der Darstellungstheorie. Fundamental ist die Verwendung des Haar-Maßes auf einer kompakten Liegruppe; dessen relevante Eigenschaften aus [BtD85, §I.5] diskutiert werden. Die Konstruktion des Haar-Maßes soll nicht gegeben werden. Quelle: [BtD85, §II.1, II.3].

Vortrag 6 (Waldenzik). Charaktere und Darstellungen kompakter abelscher Liegruppen [BtD85, §II.4, §II.8]. Ein schönes Beispiel ist die Klassifikation der Darstellungen von $SU(2)$.

Vortrag 7 (**Lee**, Der Satz von Peter-Weyl, Überblicksvortrag,)**.** Geben Sie eine Übersicht über den Satz und wichtige Konsequenzen, insbesondere für die Darstellungstheorie [BtD85, Chapter III].

Der maximale Torus

Vortrag 8 (Rolf). Maximaler Torus, Weylgruppe, Aussage des Hauptsatzes über maximale Tori [BtD85, Theorem IV.1.6]. Erste Konsequenzen [BtD85, §IV.2]. Maximale Tori und Weylgruppen der klassischen Gruppen [BtD85, §IV.3]. Bemerkung: für die klassischen Gruppen ist die Aussage des Satzes über den maximalen Torus im Wesentlichen aus LA II bekannt!

Vortrag 9. Der Lefschetzsche Fixpunktsatz [Hat02, Theorem 2C.3] mitsamt Beweis. Dies ist die topologische Grundlage für den Beweis des Satzes über den maximalen Torus.

Vortrag 10. Beweis des Satzes über maximale Tori nach [DW98].

Wurzelsysteme

Vortrag 11 (Die adjungierte Darstellung und Gruppen vom Rang 1, Wurzeln und Weylkammern)**.** Quelle. [BtD85, §V.1, V.2].

Vortrag 12 (Wurzelsysteme)**.** Abstrakte Wurzelsysteme und ein kleiner Ausblick auf Dynkin-Graphen. Quelle [BtD85, §V.3,§V.4,§V.5]

Vortrag 13 (Die Wurzelsysteme der klassischen Gruppen)**.** [BtD85, §V.6]

Vortrag 14 (**Bröring**, Stiefel-Diagramm und Fundamentalgruppen)**.** [BtD85, §V.7].

Vortrag 15 (Ausblick: Klassifikation der zusammenhängenden kompakten Liegruppen)**.**

References

[BtD85] Theodor Bröcker and Tammo tom Dieck, *Lie groups and lie algebras*, Representations of Compact Lie Groups, Springer, 1985, pp. 1–63.

[DK12] Johannes Jisse Duistermaat and Johan AC Kolk, *Lie groups*, Springer Science & Business Media, 2012.

[DW98] William Gerard Dwyer and CW Wilkerson, *The elementary geometric structure of compact lie groups*, Bulletin of the London Mathematical Society **30** (1998), no. 4, 337–364.

[Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.

[KJ08] Alexander Kirillov Jr, *An introduction to lie groups and lie algebras*, no. 113, Cambridge University Press, 2008.

[War13] Frank W Warner, *Foundations of differentiable manifolds and lie groups*, vol. 94, Springer Science & Business Media, 2013.