

Funktionentheorie SS 2018

Thomas Nikolaus

12. Juli 2018

Zusammenfassung

Dies ist ein Vorlesungsskript zu der Vorlesung Funktionentheorie im Sommersemester 2018 an der Universität Münster.

Inhaltsverzeichnis

1	Holomorphe Funktionen	3
1.1	Komplexe Zahlen	3
1.2	Topologische Räume	5
1.3	Holomorphe Abbildungen	9
2	Analytische Funktionen	13
2.1	Potenzreihen	13
2.2	Topologische Konsequenzen	17
2.3	Beispiele	19
3	Complex Integration	20
3.1	Integration along curves	20
3.2	Die Cauchy'schen Integralformeln	24
4	Der Residuensatz	29
4.1	Laurentreihen	29
4.2	Residuen	34
4.3	Anwendungen des Residuensatzes	36
5	Riemannsche Flächen	40
5.1	Definition	40
5.2	Überlagerungen	46
5.3	Analytische Fortsetzung	53
6	Differentialformen	59
6.1	Definition und elementare Eigenschaften	59
6.2	Integration of differential forms	66

7	Proof of Residuum theorem	67
8	Der Satz von Riemann Roch	68

Vorlesungen: Mo 10-12 und Do 10-12 Übungen; Do 2-4, Fr. 10-12. Übungen: Abgabe bis Donnerstag 12:00 Uhr. Hochladen: Donnerstag morgen 50 Prozent der Übungsaufgaben Einteilung diesen Donnerstag (Listen). Beginn der Vorlesung 10:10 Uhr (mit Pause).

Inhalt der Vorlesung:

1. Holomorphe Funktionen
2. Analytische Funktionen
3. Komplexe Integrationstheorie
4. Singularitäten und Residuen
5. Riemannsche Flächen

Hauptslogan der Funktionentheorie.

Studiere Funktionen wie z.B. Polynome $p(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_0$ oder die Exponentialabbildung $\exp(x) = \sum \frac{1}{n!} x^n$ nicht als Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sondern als Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Zum Beispiel hat nicht jedes Polynom aufgefasst als Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $x^2 + 1$) eine Nullstelle, aber aufgefasst als Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist es entweder konstant oder hat eine Nullstelle (Fundamentalsatz der Algebra). Wir werden sehen, wie man das beweist und versteht (d.h. den Grund warum es gilt). Präziser werden wir komplexe Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ studieren, die im komplexen Sinne differenzierbar sind (holomorph). Wir werden sehen, dass dies eine extrem starke Bedingung ist und sich ganz anders verhält als reelle Differenzierbarkeit.

1 Holomorphe Funktionen

1.1 Komplexe Zahlen

Wir erinnern an den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$: jede komplexe Zahl kann eindeutig geschrieben werden als

$$z = a + ib$$

wobei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ist. Diese hat die Eigenschaft, dass $i^2 = -1$. Wir nennen a den Realteil von z und b den Imaginärteil. Wir schreiben $a = \operatorname{Re}(z)$ und $b = \operatorname{Im}(z)$. Das Inverse einer komplexen Zahl $z = a + ib$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Definition 1.1. Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ nennen wir $\bar{z} = a - ib$ die komplex konjugierte komplexe Zahl und $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ den Betrag.

Insbesondere haben wir

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

Bemerkung 1.2. Die komplexe Konjugation als Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein Körperautomorphismus und quadriert zur Identität.

Definition 1.3. Wir nennen

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

die obere Halbenene und

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

die offene Kreisschreibe von Radius r um z_0 .

Die komplexen Zahlen sind als $\mathbb{R}$ -Vektorraum isomorph zu $\mathbb{R}^2$. Daher ist es auch klar, wie stetige Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert sind (falls wir annehmen, dass aus der Analysis bekannt ist, was stetige Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind). Allgemeiner können wir für Teilmengen $M \subseteq \mathbb{C}$ stetige Abbildungen $M \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten. Wir erinnern an die Definition in Form der folgenden Bedingungen:

Definition 1.4. Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ heißt stetig im Punkt $z \in M$ falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist

1. für jede offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von $f(z)$ existiert eine offene Umgebung $V \subseteq M$ von z , sodass $f(V) \subseteq U$.
2. Für jede Folge von Punkten $z_n \in M$ die gegen z konvergiert konvergiert auch die Folge $f(z_n)$ gegen $f(z)$.
3. Die Abbildung $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig (in einem der Sinne die analog zu (1) und (2) sind).

Wichtige Beispiele stetiger Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind polynomiale Abbildungen (kurz und etwa unpräzise: Polynome)

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

und rationale Funktionen $M \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

mit $M = \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}$. Mit einer Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ haben wir auch die komplex konjugierte Abbildung $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{C}$ sowie die reellwertige Abbildung $|f| : M \rightarrow \mathbb{R}$ die definiert sind als Postkomposition von f mit $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Summen und Produkte stetiger Funktionen sind selbst stetig.

1.2 Topologische Räume

Allgemeiner kann man das Konzept von stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen definieren. Wir erinnern kurz an die Definitionen und die wichtigen Eigenschaften, die wir in der Vorlesung benutzen wollen.

Definition 1.5. *Ein topologischer Raum ist eine Menge X zusammen mit einer Teilmenge der Potenzmenge $P(X)$ deren Elemente wir als offene Mengen bezeichnen, sodass*

1. *Die leere Menge und der ganze Raum X sind offen.*
2. *Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind offen.*

Die Menge der offenen Mengen wird als Topologie bezeichnet. Eine Abbildung $X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heisst stetig falls für jede offene Mengen $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist

Wir nennen $A \subseteq X$ abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist. Wir nennen U eine Umgebung eines Punktes x , falls eine offene Menge $U' \subseteq U$ existiert mit $x \in U'$ (BILD).

Beispiel 1.6. $\mathbb{R}^n$ bildet einen topologischen Raum mit dem üblichen Begriff von offenen Mengen, i.e. eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst offen, falls es für jeden Punkt $x \in M$ ein reelles $r > 0$ gibt, sodass

$$D_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\} \subseteq M .$$

Bild. Die Axiome sind klar.

Beispiel 1.7. Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann wird M selbst ein topologischer Raum durch folgender Topologie: eine Menge $V \subset M$ ist offen, wenn es eine offene Menge $U \subset X$ gibt, sodass $V = U \cap M$. Man verifiziert leicht, dass die Axiome eines topologischen Raumes erfüllt sind. Die Topologie auf M ist durch folgende Eigenschaft eindeutig charakterisiert: eine Abbildung $f : Y \rightarrow M$ für einen topologischen Raum Y ist stetig, genau dann wenn die Komposition $Y \rightarrow M \rightarrow X$ stetig ist. (Übung?)

Wir nennen die Topologie auf einer Teilmenge auch die Unterraumtopologie. Insbesondere wird jede Teilmenge von $\mathbb{C}$ zu einem topologischen Raum und der Begriff der Stetigkeit für Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ stimmt überein mit dem vorher definierten.

Definition 1.8. *Ein topologischer Raum X heisst kompakt, falls für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i \subseteq X$ offen und $X = \bigcup U_i$ (eine sog. offene Überdeckung) eine endliche Teilfamilie $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ existiert mit $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heisst kompakt, falls sie in der Unterraumtopologie kompakt ist.*

Da offene Teilmengen $U \subseteq K$ in der Unterraumtopologie gegeben sind als $U = K \cap U'$ für $U' \subseteq X$ offen folgt einfach, dass eine Teilmenge K kompakt ist, falls

Beispiel 1.9. Das Intervall $(0, 1]$ ist nicht kompakt, betrachte $\{(1/n, 1]\}_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}}$.

Eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ (d.h. mit offenem Komplement) eines kompakten Raumes X ist selbst kompakt. Um dies zu sehen sei eine offene Überdeckung $U_i = U'_i \cap A$ von A gegeben. Dann ist die Familie (U'_i, A^c) eine offene Überdeckung von X und daher existiert eine endliche Teilüberdeckung etc.

Satz 1.10 (Heine Borel). *Für eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent*

1. K ist kompakt
2. K ist abgeschlossen und beschränkt (d.h. liegt in einem Ball $B_r(0)$ für r groß genug)
3. K ist folgenkompakt, d.h. für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K existiert eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Analysis. □

Satz 1.11. *Für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und $K \subseteq X$ kompakt ist auch $f(K) \subseteq Y$ kompakt.*

Beweis. obdA $K = X$ und $f(K) = Y$. TODO □

Korollar 1.12. *Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt auf jedem kompakten Unterraum $K \subseteq X$ ein Minimum und ein Maximum an.*

Beweis. Das Bild $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Weil es beschränkt ist, hat es ein endliches Supremum und weil es abgeschlossen ist, ist das Supremum in $f(X)$ enthalten. Der Fall des Minimums geht analog. □

Definition 1.13. *Ein topologischer Raum X heisst hausdorffsch, falls für je zwei Punkte $x, y \in X$ offene Mengen U und V existieren mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U$ sowie $y \in V$.*

Beispiel 1.14. $\mathbb{R}^n$ und alle Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sind hausdorffsch. Um dies zu sehen, betrachte $x \neq y$ in $\mathbb{R}^n$ und setze $r := \frac{|x-y|}{3}$. Dann sind $D_r(x)$ und $D_r(y)$ diskjunkt und offen.

Proposition 1.15. *Sei X hausdorffsch und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen, d.h. $X \setminus K$ ist offen.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für jeden Punkt $x \in X \setminus K$ eine in X offene Menge $U_x \subseteq X \setminus K$ existiert, sodass $x \in U_x$. Dann folgt nämlich dass $X \setminus K = \bigcup_{x \in X \setminus K} U_x$ als Vereinigung offener Mengen offen ist. Sei also ein solches $x \in X \setminus K$ gegeben. Wir können, da X hausdorffsch ist für jedes $k \in K$ offene Mengen $U(k)$ mit $x \in U(k)$ und $V(k)$ mit $k \in V(k)$ finden, sodass $U(k) \cap V(k) = \emptyset$. Da K kompakt ist, reichen

bereits endlich viele der offenen Mengen $V(k_1), \dots, V(k_n)$ um K zu überdecken. Dann ist aber $U_x := U(k_1) \cap \dots \cap U(k_n)$ eine offene Menge (da Durchschnitt endlich vieler offener Mengen) die disjunkt zu $V(k_1), \dots, V(k_n)$ ist und daher disjunkt zu K . $\square$

Korollar 1.16. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Bijektion mit X kompakt und Y hausdorffsch. Dann ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig (wir sagen, dass f ein Homöomorphismus ist),

Beweis. Um zu sehen, dass f^{-1} stetig ist, reicht es offenbar zu zeigen, dass f offene Mengen auf offene Mengen abbildet. Das ist aber äquivalent dazu, dass f abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet. $\square$

Beispiel 1.17. Im Allgemeinen ist es hochgradig falsch, dass die Umkehrung einer stetigen bijektiven Abbildung wieder stetig ist. Als Beispiel betrachte die Abbildung

$$[0, 1) \rightarrow S^1 \quad x \mapsto \exp(2\pi i x)$$

Diese ist offenbar stetig, aber die Umkehrung ist nicht stetig, da sie im Punkt $0 \in S^1$ nicht stetig ist. Dies sieht man zum Beispiel, indem man sich folgen anschaut, die sich von unten an $1 \in S^1$ annähert. Dann konvergiert die Bildfolge gegen 1 und nicht gegen 0.

Definition 1.18. Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend falls für jede Zerlegung $X = U \sqcup V$ (insbesondere $U \cap V = \emptyset$) mit U und V offen gilt, dass entweder $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt zusammenhängend, falls sie mit der Unterraumtopologie zusammenhängend ist.

Eine nicht-leere, offene und zusammenhängende Teilmenge U von $\mathbb{C}$ heißt auch ein Gebiet von $\mathbb{C}$.

Bild.

Lemma 1.19. Jedes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

Beweis. Wir nehmen obdA an, dass $[a, b] = [0, 1]$ und dass wir eine Zerlegung $[0, 1] = U \sqcup V$ haben. Sei $u := \sup(U)$ und $v := \sup(V)$. Weil U und V abgeschlossen sind (also komplemente von offenen Mengen) enthalten sie auch die jeweiligen Suprema, d.h. $u \in U$ und $v \in V$. Insbesondere gilt $u \neq v$. Wir nehmen obdA an, dass $u < v$. Dann ist $v = 1$ (weil b in einer der Mengen liegen muss). Es folgt dann aber auch, dass $(u, 1] \subseteq V$, weil jeder der Punkte in diesem Intervall in einer der beiden Mengen liegen muss, aber nicht in U liegen kann. Weil V abgeschlossen ist, impliziert dies aber auch, dass $u \in V$, im Widerspruch zur Annahme $u \in U$ und $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Wir

Satz 1.20. Für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und $M \subseteq X$ zusammenhängend ist auch $f(M) \subseteq Y$ zusammenhängend.

Beweis. Wir können obdA annehmen, dass $X = M$ und $Y = f(M)$ (insbesondere f surjektiv), da wir uns sonst einschränken. Sei also eine Zerlegung $Y = U \sqcup V$ gegeben. Dann folgt, dass $f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V)$ eine disjunkte Zerlegung von X in offene Mengen ist. Wir schließen, dass $X = U$ oder $X = V$ was aber bereits $Y = f(U)$ oder $Y = f(V)$ impliziert. $\square$

Definition 1.21. Ein Pfad in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ (BILD). Ein Raum X heisst wegzusammenhängend, falls für jedes Paar von Punkten $x, y \in X$ eine Pfad γ in X mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ existiert.

Beispiel 1.22. Jedes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ (oder (a, b)) ist wegzusammenhängend. Allgemeiner sind Bälle

$$D_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$$

wegzusammenhängend, da man einen linearen weg wählen kann.

Proposition 1.23. Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist auch zusammenhängend.

Beweis. Wir behaupten zunächst, dass ein Raum genau dann zusammenhängend ist, falls für je zwei Punkte $x, y \in X$ eine zusammenhängende Teilmenge $U \subseteq X$ existiert mit $x, y \in U$. Falls X zusammenhängend ist, können wir $U = X$ wählen. Für das Gegenteil nehmen wir an, dass $X = U \sqcup V$. Falls U und V beide nichtleer sind wähle Punkte $u \in U$ und $v \in V$. Für jede Menge $K \subseteq X$ mit $u, v \in K$ gilt $K = U \cap K \sqcup V \cap K$ sodass K nicht zusammenhängend sein kann. Also muss entweder U oder V leer sein und daher X zusammenhängend.

Jetzt nehmen wir an, dass X wegzusammenhängend ist. Für zwei Punkte $x, y \in X$ finden wir jetzt einen Pfad γ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Das Bild $\gamma[0, 1] \subseteq X$ ist dann aber zusammenhängend und enthält x und y . $\square$

Bemerkung 1.24. Das Gegenteil gilt nicht: es gibt zusammenhängende topologische Räume die nicht wegzusammenhängend sind. Diese sind allerdings 'pathologisch' und spielen keine Rolle für uns.

Korollar 1.25. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und alle offenen Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ sind zusammenhängend.

Beweis. Diese sind (offensichtlich) wegzusammenhängend. $\square$

BILD

1.3 Holomorphe Abbildungen

Wir erinnern an das Konzept von Differenzierbarkeit aus der Analysis: Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst differenzierbar in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit $f'(x)$ bezeichnet. Offenbar reicht es für diese Definition aus, dass f in einer Umgebung von x definiert ist. Wenn eine Abbildung in jedem Punkt differenzierbar ist bekommen wir so ihre Ableitung $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Für eine Abbildung $f = f(x_0, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist die partielle Ableitung $\partial_i f(x_0, \dots, x_n)$ und partielle Differenzierbarkeit) in einem Punkt $(x_0, \dots, x_n)$ definiert als die Ableitung der Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x_i \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0, \dots, x_n)$ bei fixierten Koordinaten x_j für $j \neq i$.

Definition 1.26. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ heisst komplex differenzierbar im Punkt $z_0 \in M$ wobei M eine Umgebung von z_0 ist falls der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Dieser wird dann mit $f'(z)$ bezeichnet. Sie heisst holomorph im Punkt x falls sie komplex differenzierbar in einer Umgebung ist. Eine Abbildung heisst holomorph in einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ falls sie in jedem Punkt holomorph ist (äquivalent in jedem Punkt komplex differenzierbar).

Beispiel 1.27. • Konstante Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind holomorph mit Ableitung 0.

- Die Identitätsabbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z$ ist holomorph mit Ableitung $f'(z) = 1$.
- Die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegen durch $f(z) = \bar{z}$ ist stetig, aber in keinem Punkt $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Wir zeigen dies der Einfachheit halber für $z = 0$, jeder andere Punkt geht analog. Dazu nehmen wir an, dass der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

existiert. Dann müsste auch der Grenzwert für z reell oder rein imaginär (also die Einschränkung) existieren und diese müssten übereinstimmen (BILD). Im ersten Fall ist aber $\frac{\bar{z}}{z} = 1$ und im zweiten $\frac{\bar{z}}{z} = -1$. Die Grenzwerte stimmen aber nicht überein.

Dies sollte als Warnung betrachtet werden. Wir werden gleich sehen (mit den notwendigen Definitionen) dass diese Abbildung, aufgefasst als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar ist.

- Die Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|^2$ ist im Punkt $z = 0$ komplex differenzierbar aber nicht holomorph.

Dazu betrachten wir zunächst den Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = 0 .$$

Für jede andere komplexe Zahl $z_0 \neq 0$ existiert der Grenzwert von

$$\frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = \frac{(|z| - |z_0|)(|z| + |z_0|)}{(z - z_0)}$$

aber nicht.

Für komplexe differenzierbarkeit gelten die gleichen Regeln wie für reelle Differenzierbarkeit mit den gleichen Beweisen (die wir nicht wiederholen wollen). Wir machen die Konvention, dass Funktionen stets Abbildungen $M \rightarrow \mathbb{C}$ sind und falls wir sagen, dass f differenzierbar in z_0 ist, so heisst dies implizit, dass f in einer Umgebung von z_0 definiert ist.

Satz 1.28. 1. Seien f und g im Punkt z_0 komplex differenzierbare Funktionen. Dann sind auch $f + g$ und fg in z_0 komplex differenzierbar und es gilt

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0) \quad (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) .$$

2. Ist f in z_0 komplex differenzierbar mit $f(z_0) \neq 0$ dann ist auch $1/f$ in z_0 komplex differenzierbar mit

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2} .$$

3. Seien f komplex differenzierbar in z_0 und g komplex differenzierbar in $f(z_0)$. Dann ist auch $g \circ f$ komplex differenzierbar in z_0 und es gilt $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.

Korollar 1.29. Polynomiale Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Die Ableitung ist wieder ein Polynom (mit den üblichen Rechenregeln). Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich holomorph, die Ableitung ist wieder eine rationale Funktion mit gleichen Definitionsbereich.

Definition 1.30. Eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ zwischen zwei offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{C}$ heisst biholomorph falls Sie bijektiv ist und sowohl die Abbildung $U \xrightarrow{f} V \subseteq \mathbb{C}$ holomorph ist als auch die 'Inverse' $V \xrightarrow{f^{-1}} U \rightarrow \mathbb{C}$.

Jede biholomorphe Abbildung ist offensichtlich ein Homöomorphismus, da jede holomorphe Abbildung stetig ist. Den folgenden Satz beweist man auch genau wie im reellen (Satz vom lokalen Diffeomorphismus bzw. impliziter Funktionensatz).

Satz 1.31. Gegeben eine bijektive, holomorphe Abbildung $f : U \rightarrow V$ sodass $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist. Diese ist genau dann biholomorph, wenn $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Dann ist

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$$

Bemerkung 1.32. Die Stetigkeit der Ableitung von f folgt tatsächlich aus der Holomorphie wie wir bald sehen werden (im starken Kontrast zum reellen Fall), sodass diese Voraussetzung redundant ist!

Jetzt wollen wir ein Kriterium für die komplexe Differenzierbarkeit beweisen. Für eine Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir die Abbildungen $\operatorname{Re}(f) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im}(f) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben als Real- und Imaginärteil und schreiben diese also $\operatorname{Re}(f)(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$, mit anderen Worten wir benutzen den Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ mit $(x, y) \mapsto x + iy$.

Satz 1.33 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung, die auf der offenen Menge U stetig komplex differenzierbar ist¹). Dann existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}, \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y}, \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}, \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y}$, sind stetig auf U und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} . \quad (1)$$

Falls umgekehrt die partiellen Ableitungen existieren, stetig sind und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (1) erfüllen, so ist f holomorph.

Der Beweis dieses Satzes wird uns für den Rest des Kapitels beschäftigen. Zunächst stellen wir erstmal fest, dass es einfach ist, partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ für Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ zu definieren. Diese sind dann selbst komplexwertig. Mit diesen partiellen Abbildungen sind die Cauchy-Riemannschen DGLs äquivalent zu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

Beweis. Zunächst wollen wir die einfache Richtung herleiten, nämlich, dass für stetig komplex differenzierbares f die Gleichungen erfüllt sind.

Wir haben für ein festes $z_0 = x_0 + iy_0 \in M$

$$f'(z) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x + iy_0 - (x_0 + iy_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) .$$

und analog

$$f'(z) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{x_0 + iy - (x_0 + iy_0)} = -i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{y - y_0} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) .$$

Daraus folgt sofort die stetige partielle differenzierbarkeit und die Cauchy-Riemannschen DGLs □

¹Dies folgt wiederum aus Holomorphie in z_0

Für die Umkehrung benötigen wir das Konzept der totalen Differenzierbarkeit. Allgemeiner kann man reelle differenzierbarkeit für Abbildungen $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definieren. Eine solche Abbildung f heisst reell differenzierbar in einem Punkt $x \in U$ falls eine lineare Abbildung $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (im Sinne der linearen Algebra) existiert mit

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)|}{|y - x|} = 0.$$

Lemma 1.34. 1. Die lineare Abbildung $f'(x)$ ist, falls sie existiert, eindeutig bestimmt.

2. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x im klassischen Sinne, falls Sie differenzierbar im obigen Sinne ist.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Dreiecksungleichung und dem Verschwinden der Operatornorm. Die zweite folgt durch einsetzen der Definitionen. $\square$

Bemerkung 1.35. Insbesondere ist die ‘Ableitung’ eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nun eine Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ wobei $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die Menge der $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen bezeichnet.

Allgemeiner kann man den Begriff der Ableitung für eine Abbildung $E \rightarrow F$ zwischen Banachräumen definieren. Beispiele sind endlich dimensionale $\mathbb{R}$ -Vektorräume. Zwar sind alle solche isomorph zu $\mathbb{R}^n$ und jede norm ist (in einem geeigneten Sinne) äquivalent zur Standard norm, aber es ist im Allgemeinen besser keine Basis zu wählen.

Satz 1.36. Eine Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die in allen variablen stetig partiell differenzierbar ist, ist auch total differenzierbar (mit Ableitung gegeben durch die Jacobi Matrix).

Beweis. Analysis. $\square$

Proposition 1.37. Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ ist in $z_0 \in M$ komplex differenzierbar, genau dann wenn sie aufgefasst als Abbildung $M \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $z_0 = x + iy$ total differenzierbar ist und die Ableitung $f'(z_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aufgefasst als Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ komplex linear ist.

Beweis. Falls f komplex differenzierbar ist, so betrachten wir für $z_0 \in \mathbb{C}$ die lineare Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ geben durch multiplikation mit $f'(z_0)$. Es folgt aus der komplexen differenzierbarkeit, dass

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0 \quad (2)$$

und umgekehrt folgt komplexe diffbarkeit aus der existenz einer solchen Abbildung f .

Eine solche lineare Abbildung $f'(z_0)$ existiert aber offensichtlich genau dann, wenn eine reelle lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ existiert die obige Gleichung (2) erfüllt und darüberhinaus $\mathbb{C}$ -linear ist. Ersteres ist genau die totale Differenzierbarkeit. $\square$

Beweis der Umkehrung der CRDGLs. Wir nehmen an, dass die Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ reelle stetig partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen die CRDGLs erfüllen. Dann ist f reell total differenzierbar und die Ableitung $f'(z_0)$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Diese ist genau dann $\mathbb{C}$ -linear, wenn die CRDGLs erfüllt sind. □

2 Analytische Funktionen

2.1 Potenzreihen

Wir erinnern daran, dass eine (komplexwertige) Reihe ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ ist. Sie heisst konvergent, falls die Folge der Partialsummen konvergiert. Sie heisst absolut konvergent falls die Reihe $\sum |a_n|$ konvergiert. Ein wichtiges Beispiel ist die geometrische Reihe

$$\sum q^n$$

die für $|q| < 1$ absolut konvergiert mit Grenzwert $\frac{1}{1-q}$. Für absolut konvergente Reihen gilt der Umordnungssatz, d.h. für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

und das Assoziativgesetz, d.h. für eine Partition $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} A_i$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{a \in A_i} a \right).$$

Wir erinnern ausserdem an folgende Konvergenzkriterien:

- Wurzelkriterium: es gelte $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dann konvergiert die Reihe absolut. Für $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ ist sie divergent.
- Quotientenkriterium: es gelte $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, dann konvergiert die Reihe absolut.

Eine Reihe von Funktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

mit $f_i : M \rightarrow \mathbb{C}$ heisst gleichmäßig gegen f konvergent, falls sie in der Supremumsnorm gegen f konvergiert, d.h. falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n > n_0$ und alle $z \in M$ gilt $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$. Falls alle f_n stetig sind und gleichmäßig gegen f konvergieren, so folgt, dass auch f stetig ist (Analysis oder gute Aufgabe). Eine Reihe heisst lokal gleichmäßig konvergent auf einer offenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$, falls jeder Punkt $m \in M$ eine offene Umgebung besitzt auf der die Folge lokal gleichmäßig konvergiert.

Definition 2.1. Eine (komplexe) Potenzreihe in der Variable z ist eine Reihe der Form

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^i$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$. Die Menge der $z \in \mathbb{C}$ für die die Reihe konvergiert heisst Konvergenzbereich der Reihe.

Man kann auch Potenzreihen um einen Entwicklungspunkt z_0 als Potenzreihen der Form $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$ definieren. Aber dies ist nach einem Koordinatenwechsel $z \mapsto z + z_0$ auf den obigen Fall zurückzuführen und wird daher im Sinne einer einfacheren Notation nicht getrennt behandelt.

Satz 2.2. Zu jeder Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^i$ existiert genau ein $r \in [0, \infty]$, genannt Konvergenzradius sodass gilt:

1. Auf der offenen Kreisscheibe $D_r(0)$ ist die Reihe absolut und lokal gleichmäßig konvergent.
2. Für $|z| > r$ ist die Reihe divergent.

Es gilt $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ (Formel von Cauchy-Hadamard).

Beweis. Wir beweisen zunächst folgende Hilfssaussage (Abelsches Lemma): die Potenzreihe sei an der Stelle $z = z_0$ konvergent, dann gilt, dass Sie lokal gleichmäßig konvergent auf $D_{|z|}(0)$ ist.

Um dies zu sehen argumentieren wir wie folgt: $|a_n z_0|^n$ ist eine Nullfolge und daher beschränkt, d.h. es existiert $C > 0$ mit $|a_n z_0|^n < C$, also $|a_n| < \frac{C}{|z_0|^n}$. Es folgt für $z \in D_{|z|}(0)$:

$$|a_n z^n| \leq \frac{C}{|z_0|^n} |z|^n \leq C q^n$$

mit $q = \frac{|z|}{|z_0|}$. Daher ist die geometrische Reihe eine Majorante.

Für die Aussage des Theorems sei nun r nach der Cauchy-Hadamard Formel gegeben. Es folgt, dass für $|z| < qr$ mit $q < 1$ gilt

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} \leq qr \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Dies impliziert konvergenz in einem Punkt im Inneren und damit mit obigen Überlegungen für jeden Punkt.

Für die Divergenz sei z gegeben mit $|z| > qr$ mit $q > 1$. Dann ist

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} \geq qr \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$

und daher die Reihe divergent in z (und damit auch in jedem Punkt mit größerem Betrag). $\square$

Bemerkung 2.3. Die Formel von Cauchy-Hadamard ist in der Praxis meist nicht wirklich nützlich.

Auf dem Rand des Konvergenzbereiches machen wir keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz.

Beispiel 2.4. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

hat Konvergenzradius 0 und die Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

hat Konvergenzradius ∞ (Quotientenkriterium).

Satz 2.5 (Identitätssatz). *Seien zwei Potenzreihen $g(z) = \sum a_i z^i$ und $h(z) = \sum b_i z^i$ auf einer Kreisscheibe mit Radius ε konvergent und stimmen dort überein (oder auf einer Folge von Punkten die gegen 0 konvergiert), so gilt $a_i = b_i$ für alle i .*

Beweis. Angenommen nicht alle Koeffizienten stimmen überein, und sei i minimal sodass $a_i \neq b_i$. Dann betrachten wir die auf $D_\varepsilon(0)$ konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+i} - b_{n+i}) z^n \right).$$

Es gilt $f(0) \neq 0$ und daher existiert eine Umgebung von 0 in der $f(z) \neq 0$ (Stetigkeit von f). Es folgt für $z \neq 0$ und z in dieser Umgebung, dass

$$g(z) - h(z) = z^i f(z) \neq 0$$

$\square$

Definition 2.6. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, dann heisst eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch falls für jeden Punkt $z_0 \in U$ eine Potenzreihe in $z - z_0$ existiert, die in einer Umgebung von z_0 konvergiert und mit f übereinstimmt (aufgrund des Identitätssatzes ist diese Potenzreihe eindeutig bestimmt). Eine Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ganz, falls Sie durch eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe dargestellt werden kann.*

Wir formulieren nun das Einsetzungsprinzip.

Satz 2.7. Seien analytische Abbildungen $U \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben sodass $f(U) \subseteq V$. Dann ist auch $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch.

Beweis. Sei $u \in U$ und $f(u) =: v$. Wir wählen Potenzreihen $\sum \alpha_i(z - u)^i$ und $\sum \beta_j(z - v)^j$ die f und g in kleinen Umgebungen $D_\varepsilon(u)$ und $D_\delta(v)$ repräsentieren. Wir können obdA durch Verkleinern von ε annehmen, dass $f(D_\varepsilon(u)) \subseteq D_\delta(v)$. Dann bekommen wir für $g \circ f$ auf $D_\varepsilon(u)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j z^j \right)^i \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(\beta_0 + \beta_1 z + \dots) + \alpha_2(\beta_0 + \beta_1 z + \dots)^2 + \dots \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 \beta_0 + \alpha_2 \beta_0^2 + \dots) + (\alpha_1 \beta_1 + 2\alpha_2 \beta_0 \beta_1 + \dots)z + \dots \end{aligned}$$

die dort konvergiert (wegen Umordnung und Assoziativität). $\square$

Korollar 2.8. Die Potenzreihe $f(z) = \sum a_i z^i$ sei auf einer Kreisscheibe $D_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ konvergent. Dann ist f auf $D_r(0)$ analytisch. Genauer ist für jedes $z_0 \in D_r(0)$ die Funktion f auf $D_{r-|z_0|}(z_0)$ durch eine konvergente Potenzreihe in $z - z_0$.

Beweis. Für gegebenes z_0 betrachte die Potenzreihe $g(z) = z - z_0$. Nach dem Einsetzungsprinzip ist $f(z - z_0)$ analytisch und in der Kreisscheibe durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar (nach dem Beweis). KORREKTUR $\square$

Man kann sich leicht überlegen, dass die Summe und das Produkt analytischer Funktionen wieder analytisch sind. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(U)$ die Menge der Funktionen $U \rightarrow \mathbb{C}$ die analytisch sind (dies ist in eine $\mathbb{C}$ -algebra). Für eine analytische Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ bekommen wir nach dem Einsetzungsprinzip eine Abbildung

$$f^* : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(U) \quad g \mapsto g \circ f .$$

Dies wird wesentlich sein wenn wir globale Objekte (wie Mannigfaltigkeiten) betrachten.

Bemerkung 2.9. Reell analytische Funktionen kann man analog definieren und Sie haben die gleichen Eigenschaften wie bisher bewiesen.

Satz 2.10. Sei $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r . Dann ist f differenzierbar auf $D_r(0)$ und die Ableitung ist dort dargestellt durch die konvergente Potenzreihe

$$f'(z) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i z^{i-1}$$

Beweis. Die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i z^i$$

hat wegen $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ auch Konvergenzradius r . Es gilt aber

$$z \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i z^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i z^{i-1}$$

und somit konvergiert für $z \neq 0$ die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i z^i$ genau dann wenn die andere konvergiert.

Wir benutzen nun folgende Aussage: Sei $f_i : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen die punktweise gegen f konvergiert und alle f_i seien differenzierbar. Weiterhin sei die Folge f'_i gleichmäßig konvergent. Dann ist auch f differenzierbar und es gilt $f' = \lim f'_i$. □

Eine analoge Aussage gilt natürlich für Potenzreihen um z_0 anstatt 0.

Korollar 2.11. *Jede analytische Funktion $U \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph.*

Differenziert man f sukzessive so erhält man $f^{(k)}(0) = k!a_k$ und daher $a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$ und damit die Taylorformel für analytische Funktionen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} z^k$$

Wir bemerken schließlich noch, dass für jede Potenzreihe $\sum a_n z^n$ mit Konvergenzradius r auch die Potenzreihe $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ auf $D_r(0)$ konvergiert und eine Stammfunktion bildet. Also haben analytische Funktionen lokale Stammfunktionen. Global ist dies nicht der Fall. Die Funktion $\frac{1}{z}$ ist auf $\mathbb{C}^*$ holomorph und lokal bildet der Logarithmus eine Stammfunktionen, aber es gibt keinen global definierten Logarithmus $\log : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$.

2.2 Topologische Konsequenzen

Satz 2.12. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) und f, g seien analytische Funktionen $U \rightarrow \mathbb{C}$. Falls eine Teilmenge $K \subseteq U$ existiert, sodass $f|_K = g|_K$ und K einen Häufungspunkt besitzt, so gilt $f = g$ auf U .*

Beweis. Wir betrachten die Teilmenge $A \subseteq U$ definiert als

$$A := \{a \in U \mid \text{Es gibt eine Umgebung } V \text{ von } a \text{ in der } f = g\}$$

1. Diese ist offen.
2. Wir behaupten, dass Sie auch abgeschlossen ist. Dazu sei $a \in U$ ein Randpunkt von A . Die Stetigkeit von f und g impliziert, dass $f(a) = g(a)$. Wir entwickeln f und g um den Punkt a in Potenzreihen und wenden Satz 2.5 an. Da A offen und abgeschlossen ist, folgt $A = U$.

3. Sie ist nicht-leer, mit dem gleichen Argument wie in (2). □

Satz 2.13 (Gebietstreue). *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante analytische Abbildung auf dem Gebiet U , dann ist f offen (insbesondere ist $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ wieder ein Gebiet).*

Beweis. Zusammenhang ist klar. Wir zeigen, sei obda $f(0) = 0$. Wir wollen zeigen, dass eine Umgebung von 0 in $f(U)$ enthalten ist. Schreibe

$$f(z) = z^n(a_n + a_{n+1}z + \dots) \quad a_n \neq 0$$

und setze $h(z) = a_n + a_{n+1}z + \dots$. Dann existiert (wegen der biholomorphie der Wurzelfunktion um jeden Punkte $\neq 0$) eine holomorphe Abbildung g mit $g^n = h$ in einer Umgebung von 0. Also

$$f(z) = (zg(z))^n.$$

Die Abbildung $zg(z)$ ist lokal biholomorph (die Ableitung in 0 hoch n ist a_n), daher reicht es zu zeigen, dass die Abbildung $z \mapsto z^n$ Umgebungen von 0 auf Umgebungen von 0 abbildet. Dies folgt unmittelbar aus der Polarkoordinatendarstellung. □

Gebietstreue ist für reell analytische Funktionen falsch, zum Beispiel hat der Sinus den Wertebereich $[-1, 1]$.

Satz 2.14 (Maximumsprinzip). *Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Angenommen es gibt $z' < z$ sodass*

$$|f(z)| \leq |f(0)|$$

für alle $z \in D_{z'}(0)$. Dann ist f konstant.

Beweis. Weil $f(0)$ innerer Punkt ist, muss es größere Punkte geben. □

Bemerkung 2.15. Der Satz gilt für reelle Potenzreihen nicht: betrachte zum Beispiel

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

Diese ist für $|z| < 1$ konvergent und es gilt $|f(z)| \leq 1 = f(0)$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

Korollar 2.16. *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht konstante analytische Funktion und U ein Gebiet. Für ein Kompaktum $K \subseteq U$ nimmt die Funktion $f|_K$ ihr Maximum auf dem Rand an.*

Beweis. Aufgrund der Kompaktheit von K nimmt f das Maximum in K an. Weil $f(K^\circ)$ offen ist kann das Maximum nicht auf K° angenommen werden. □

2.3 Beispiele

Proposition 2.17. Seien f und g ganze Funktionen und g nicht null. Dann ist $\frac{f}{g} : M \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \neq 0\}.$$

Beweis. Aufgrund der Kompositionsregel (Satz 2.7) und der Produktregel reicht es zu zeigen, dass die Abbildung

$$\frac{1}{z} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

analytisch ist. Das ist eine Übungsaufgabe. □

Insbesondere sind rationale Funktionen analytisch, da Polynome ganz sind.

Beispiel 2.18. Die Exponentialabbildung

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

ist eine analytische ganze Funktion. Sie hat folgende Eigenschaften:

$$\exp'(z) = \exp(z) \quad \exp(z+w) = \exp(z) \exp(w)$$

d.h. sie ist ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Sie ist $2\pi i$ periodisch. Die Einschränkung

$$\{x + iy \mid -\pi < y \leq \pi\} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$$

ist eine Bijektion (und analog für andere Streifen) und die Einschränkung auf

$$\{x + iy \mid -\pi < y < \pi\} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = \mathbb{C}_-$$

ist biholomorph (da bijektiv und die Ableitung ungleich 0 ist, unter Benutzung von Satz 1.31)

Definition 2.19. Sei $w \in \mathbb{C}^*$. Dann heisst ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = w$ ein *Logarithmus* von w . Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$\ln : \mathbb{C}_- \rightarrow \{x + iy \mid -\pi < y < \pi\}$$

heisst Hauptzweig des Logarithmus und ist holomorph.

Beispiel 2.20. Wir haben den Sinus

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

und den Kosinus

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) \\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\end{aligned}$$

Beides sind ganze Funktionen und es gilt

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z) \quad \cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \cos'(z) = -\sin z \quad \sin'(z) = \cos(z)$$

3 Complex Integration

3.1 Integration along curves

Definition 3.1. Let X be a topological space. A curve in X is a continuous map

$$\gamma : [a, b] \rightarrow X$$

where $[a, b]$ is a closed interval in $\mathbb{R}$.

1. The points $\gamma(a)$ and $\gamma(b)$ are called endpoints of the curve.
2. If $\gamma(a) = \gamma(b)$, we say that γ is a loop or a closed curve.
3. $\gamma^{-1} : [a, b] \rightarrow X$, $t \mapsto \gamma(b + a - t)$ is called the inverse curve of γ .

Definition 3.2. Let X be a topological space, and let $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow X$ and $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow X$ be two curves such that $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Define the concatenation of γ_1 and γ_2 to be

$$\begin{aligned}\gamma_1 \cdot \gamma_2 : [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] &\rightarrow X \\ [a_1, b_1] \ni t &\mapsto \gamma_1(t) \\ [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \ni t &\mapsto \gamma_2((a_2 - b_1) + t)\end{aligned}$$

Definition 3.3. Let $U \subset \mathbb{C}$ be an open set, and let $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ be a curve. We say that γ is piecewise differentiable if there exists a partition

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b \quad \text{of } [a, b]$$

such that $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ is continuously differentiable for $j = 0, \dots, k-1$.

Bemerkung 3.4. The class of piecewise differentiable curves is stable under concatenation and inverses.

Definition 3.5. Let $U \subset \mathbb{C}$ be an open set, let $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ be a piecewise differentiable curve and let $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ be continuous. We define

$$\int_{\gamma} f \, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt$$

and call it the integral of f along γ .

Bemerkung 3.6. The previous definition is independent of the partition used to express γ as piecewise differentiable.

Bemerkung 3.7. 1. If $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ is strictly monotone and continuous, we have that

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f \, dz = \int_{\gamma} f \, dz.$$

NOTE that by virtue of this, we can always assume that $I = [0, 1]$ is the source of all paths, without loss of generality.

2. For all paths γ

$$\int_{\gamma^{-1}} f \, dz = - \int_{\gamma} f \, dz.$$

3. For all pair of paths γ_1 and γ_2

$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} f \, dz = \int_{\gamma_1} f \, dz + \int_{\gamma_2} f \, dz.$$

Definition 3.8. Let X be a topological space, and let $\gamma_0, \gamma_1 : I \rightarrow X$ be paths in X .

1. A homotopy between γ_1 and γ_2 is a continuous function

$$h : I \times I \rightarrow X$$

such that $h(t, 0) = \gamma_0(t)$ and $h(t, 1) = \gamma_1(t)$.

2. We say that H is piecewise differentiable if for each $s \in [0, 1]$ the path $t \mapsto h(t, s)$ is piecewise differentiable.

3. If $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ and $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ are closed curves, a homotopy between γ_0 and γ_1 is a homotopy between the underlying curves such that

$$h(0, s) = h(1, s) \text{ for each } s \in I.$$

Exercise 3.9. Being homotopical is an equivalence relation.

Lemma 3.10. Let X be a compact metric space, and let $\{U_k\}_{k \in K}$ be an open cover of X . Then, there exists a real number $\rho > 0$ such that given any $x \in X$, there exists a $k \in K$ such that $D_\rho(x) \subseteq U_k$.

They've seen it. □

Satz 3.11. (Cauchy's Integral Theorem) Let $U \subset \mathbb{C}$ be an open set, let $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ be analytic, and let $\Gamma_1, \Gamma_2 : I \rightarrow U$ be piecewise differentiable loops that are homotopic (as piecewise differential loops in U , i.e. the homotopy is piecewise differentiable). Then

$$\int_{\Gamma_1} f \, dz = \int_{\Gamma_2} f \, dz.$$

Beweis. Let $h : I \times I \rightarrow U$ be a homotopy between the two paths. As $I \times I$ is compact and h is continuous, $L := h(I \times I)$ is compact. Thus, we can find finitely many (say, m) points $a_k \in L$ such that, for suitable radii r_k the balls $D_{r_k}(a_k)$ cover L , and in each open ball, $f(z)$ is the sum of a convergent power series in $z - a_k$.

By Lebesgue's lemma, there exists a $\rho > 0$ such that for all $w \in L$, $D_\rho(w)$ lies in some $D_{r_k}(a_k)$. In particular, in each such $D_\rho(w)$, $f(z)$ is the sum of a convergent power series in $z - w$.

As h is continuous, and I^2 is compact, h is uniformly continuous, hence there exists an $\varepsilon > 0$ such that for $|t - t'| \leq \varepsilon$ and $|s - s'| \leq \varepsilon$ we have

$$|h(t, s) - h(t', s')| \leq \frac{\rho}{4}.$$

Let's divide $I \times I$ in a grid of rows and columns of length $\leq \varepsilon$, say:

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_r = 1 \quad \text{with } |t_j - t_{j-1}| \leq \varepsilon$$

$$s_0 = 0 < s_1 < \cdots < s_q = 1 \quad \text{with } |s_j - s_{j-1}| \leq \varepsilon$$

and let's now define, for $0 \leq j \leq q$

$$\gamma_j(t) = h\left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} t_i + \frac{t_i - t}{t_{i+1} - t_i} t_{i+1}, s_j\right)$$

for $t_1 \leq t \leq t_{i+1}$ and $0 \leq i \leq r - 1$. Notice that $\gamma_0 = \Gamma_1$ and $\gamma_q = \Gamma_2$. To conclude, it's enough to show that, for $j = 0, \dots, q - 1$ we have

$$\int_{\gamma_j} f \, dz = \int_{\gamma_{j+1}} f \, dz.$$

By the way we set things, we have that the little segments of curve

- $\gamma_j(t)$ for $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ and
- $\gamma_{j+1}(t)$ for $t_i \leq t \leq t_{i+1}$

lie in the open ball $Q_{ij} = D_\rho(h(t_i, s_j))$. Let g_{ij} be a primitive of f in Q_{ij} . Then we have:

$$\int_{\gamma_j} f \, dz = \sum_{i=0}^{r-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g'_{ij}(\gamma_j(t)) \gamma'_j(t) \, dt = \sum_{i=0}^{r-1} \left(g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i)) \right).$$

and all is left to do is to show that

$$\sum_{i=0}^{r-1} \left(g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i)) \right) = \sum_{i=0}^{r-1} \left(g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i)) \right).$$

As $\gamma_j(t_i)$ and $\gamma_{j+1}(t_i)$ for $1 \leq i \leq r - 1$ are both in $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$ (connected), and $g_{i-1,j}$ and g_{ij} are both primitives of f , thus their difference is constant.

We have the equality

$$g_{ij}(\gamma_j(t_i)) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i)) = g_{i-1\ j}(\gamma_j(t_i)) - g_{i-1\ j}(\gamma_{j+1}(t_i))$$

and thus the only elements left in the equality we want to prove are

$$-g_{0j}(\gamma_j(0)) + g_{r-1\ j}(\gamma_j(1)) = -g_{0j}(\gamma_{j+1}(0)) + g_{r-1\ j}(\gamma_{j+1}(1))$$

(the others cancelled each other out by virtue of the relation above) or, as both paths are loops:

$$-g_{0j}(\gamma_j(0)) + g_{r-1\ j}(\gamma_j(0)) = -g_{0j}(\gamma_{j+1}(0)) + g_{r-1\ j}(\gamma_{j+1}(0)).$$

Again, since $\gamma_j(0)$ and $\gamma_{j+1}(0)$ both lie on the connected set $Q_{0j} \cap Q_{r-1\ j}$, and g_{0j} and $g_{r-1\ j}$ are both primitives of f , the equality holds. $\square$

Bemerkung 3.12. Die Behauptung folgt auch aus dem Satz von Stokes aus der reellen Analysis (und ist im wesentlichen eine zweidimensionale Version davon).

Korollar 3.13. *Let $U \subset \mathbb{C}$ be an open set, let $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ be analytic, and let $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow U$ be piecewise differentiable such that $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ and $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Assume that the paths that are homotopic through a homotopy that fixed start and endpoints, then*

$$\int_{\gamma_1} f \, dz = \int_{\gamma_2} f \, dz.$$

Beweis. Exercise (?). $\square$

Definition 3.14. Ein einfach zusammenhängendes Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ ist ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) sodass jede geschlossene, stückweise diffbare Kurve in U homotop zur einer konstanten Kurve ist.

Bemerkung 3.15. Diest ist äquivalent dazu, dass jede stetige Kurve homotop zu einer konstanten Kurve ist (ohne Differenzierbarkeitsbedingungen). Es ist ausserdem unerheblich ob man Homotopien im engeren Sinne (also der Start und Endpunkt bleibt fest) oder auch ‘freie’ Homotopien zulässt.

Beispiel 3.16. Sternförmige Gebiete sind einfach zusammenhängend (Übung). Insbesondere sind Kreisscheiben einfach zusammenhängend.

Lemma 3.17. *Alle zusammenhängenden offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{C}$ sind auch wegzusammenhängend. Genauer kann man für je zwei Punkte sogar einen stückweise stetig differenzierbaren Weg finden.*

Beweis. Sei x in U gegeben. Betrachte

$$B := \{y \in U \mid \text{Es existiert ein Weg } \gamma : I \rightarrow U \text{ der } x \text{ und } y \text{ verbindet}\}$$

B ist offen (da man lokal in einem Ball verbinden kann). Wir behaupten, dass B auch abgeschlossen ist. Dazu sei $b \in \partial B$ gegeben. Wir wählen eine Kreisscheibe um b . In dieser Kreisscheibe liegt ein Punkt aus B und wir verbinden ihn mit dem Mittelpunkt. $\square$

Satz 3.18. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet. Dann hat jede auf U analytische Funktion f eine auf U analytische Stammfunktion F .

Beweis. Wähle einen beliebigen Punkt $u_0 \in U$. Für einen anderen Punkt $u \in U$ wähle einen Pfad γ von u_0 nach u und setze

$$F(u) = \int_{\gamma} f(z) dz .$$

Dies ist wohldefiniert (ZZ). Es bleibt zu zeigen, dass dies eine Stammfunktion ist und auch analytisch ist.

Da f analytisch ist gibt es für jeden Punkt $u \in U$ eine Umgebung K auf der f durch eine konvergente Potenzreihe gegeben ist. In dieser Umgebung gibt es dann auch eine Stammfunktion H von f sodass $H(u) = F(u)$ und $H : K \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch ist. Es folgt für $z \in K$:

$$\begin{aligned} H(z) - H(u) &= \int_{L_{u,z}} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_{u_0,u} * L_{u,z}} f(z) dz - \int_{\gamma_{u_0,u}} f(z) dz \\ &= F(z) - F(u) . \end{aligned}$$

Also $F(z) = H(z)$ für $z \in K$. □

Bemerkung 3.19. Es gilt auch die Umkehrung: falls jede analytische Funktion auf einem Gebiet eine Stammfunktion besitzt, so ist das Gebiet einfach zusammenhängend.

3.2 Die Cauchy'schen Integralformeln

Lemma 3.20. Für jeden Punkt $a \in \mathbb{C}$ und jeden geschlossenen (stückweise differenzierbaren) Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ist $\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz \in 2\pi i \mathbb{Z}$.

Beweis. Betrachte

$$h(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds$$

Dann ist die Funktion $g(t) = \exp(-h(t))(\gamma(t) - a)$ stetig und bis auf endlich viele Punkte differenzierbar mit Ableitung

$$g'(t) = \exp(-h(t))(-\gamma'(t) + \gamma'(t)) = 0 .$$

Also ist g konstant. Für $t = 0$ gilt $g(0) = \gamma(0) - a$. Daher

$$\exp(h(t)) = \frac{\gamma(t) - a}{\gamma(0) - a}$$

Es folgt (da γ geschlossen ist), dass $\exp(h(1)) = 1$ und damit die Behauptung. □

Definition 3.21. Für einen Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ heisst die ganze Zahl

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz$$

Windungszahl von γ bezüglich a .

Offensichtlich ist die Windungszahl nach dem Cauchyschen Integralsatz (Satz 3.11) eine Invariante der Homotopieklasse eines Pfades (genauer der Homotopieklasse in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$).

Beispiel 3.22. Betrachte für $n \in \mathbb{Z}$ den Weg

$$\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 \quad \gamma_n(t) = \exp(2\pi i n t)$$

Dann ist die Windungszahl von γ bezüglich dem Nullpunkt die Zahl n . Dies folgt aus

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i n \exp(2\pi i n t)}{\exp(2\pi i n t)} dt = n .$$

Insbesondere stimmt die formale Definition mit der intuitiven überein.

Insbesondere sind γ_n und γ_m für $m \neq n$ nicht homotop. Es folgt, dass $\mathbb{C} \setminus 0$ nicht einfach zusammenhängend ist, da sonst alle Pfade homotop wären und die Windungszahlen übereinstimmen müssten. In der Topologie zeigt man, dass jeder Pfad in $\mathbb{C} \setminus 0$ homotop zu einem γ_n ist, sodass in diesem Fall die Windungszahl eine Bijektion von der Menge der Homotopieklassen von Pfaden nach $\mathbb{Z}$ liefert.

Lemma 3.23. Sei $\gamma : I \rightarrow U \rightarrow \mathbb{C}$ ein Pfad mit U einfach zusammenhängend, dann ist die Windungszahl von γ bezüglich jedes Punktes $a \in \mathbb{C} \setminus U$ gleich 0.

Beweis. Der Pfad γ ist in U also auch in $\mathbb{C} \setminus a$ homotop zu einem konstanten Pfad. Es reicht also zu zeigen, dass für einen konstanten Pfad die Windungszahl 0 ist. Dies folgt aber unmittelbar aus der Definition, da $\gamma'(t) = 0$. $\square$

Man kann insbesondere für jeden Pfad γ die Menge $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ unterteilen in die Menge der Punkte $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ mit $n(a, \gamma) \neq 0$ und die Menge der Punkte mit $n(a, \gamma) = 0$. Die erste Menge ist beschränkt, da der Pfad in einer Kreisscheibe enthalten sein muss und nach dem Lemma jeder Punkt außerhalb Windungszahl 0 hat.

Satz 3.24 (Cauchysche Integralformel). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und γ ein geschlossener Weg in $U \setminus \{a\}$. Dann gilt

$$n(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz .$$

Eine analytische Funktion ist also insbesondere auf einer Kreisscheibe durch ihre Werte auf dem Rand der Kreisscheibe festgelegt.

Beweis. Betrachte die Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ definiert als

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{für } z \neq a \\ f'(a) & \text{für } z = a \end{cases}$$

Wir behaupten, dass f analytisch ist. Auf $U \setminus a$ folgt dies, da g dort durch Einsetzen einer analytischen Funktion in einer gebrochen rationale Funktion entsteht (Satz 2.7 und Proposition 2.17). In einer Umgebung um den Punkt a ist f gegeben durch die konvergente Potenzreihe

$$f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{1}{2}f''(a)(z-a)^2 + \dots$$

In dieser Umgebung gilt dann

$$g(z) = f'(a) + \frac{1}{2}f''(a)(z-a) + \dots$$

und somit ist g dort ebenfalls analytisch. Dann folgt sofort nach dem Cauchyschen Integralsatz 3.11, dass

$$0 = \int_{\gamma} g(z)dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} - \int_{\gamma} \frac{f(a)}{z-a} = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} - 2\pi i f(a)n(\gamma, a) .$$

□

Es gilt auch die Umkehrung. Bevor wir dies beweisen, erinnern wir daran, dass für eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge $f_i \rightarrow f$ auf $[0, 1]$ gilt

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim \int_0^1 f_i(x)dx .$$

Wir erhalten analog, dass für einen stückweise stetig diffbaren Weg γ und eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge $f_i : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim \int_{\gamma} f_i(z)dz .$$

Satz 3.25. Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und g eine stetige Abbildung $\gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w-z} dw$$

eine auf dem Komplement $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ analytische Abbildung. Genauer besitzt sie in jedem Punkt z_0 eine Entwicklung als Potenzreihe die in $D_r(z_0)$ konvergiert, solange $D_r(z_0) \cap \gamma(I) = \emptyset$.

Beweis. Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ fix. Wir wollen zeigen, dass f in z_0 analytisch ist. Dazu wählen eine Umgebung U von z_0 , sodass für alle $z \in U$ und alle $w \in \gamma(I)$ gilt:

$$\frac{z - z_0}{w - z_0} \leq 1 - \varepsilon .$$

Dies ist möglich, da wegen der Kompaktheit von $\gamma(I)$ der Nenner nach unten beschränkt ist (nämlich durch die Distanz von z_0 zu $\gamma(I)$). Insbesondere kann U durch eine Kreisscheibe gewählt werden, deren Abschluss noch komplett in $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ liegt.

Dann gilt für alle $z \in U$ und $w \in \gamma(I)$ die Gleichung

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} .$$

und die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in z und w . Wegen der Stetigkeit von g konvergiert dann auch die Reihe

$$\frac{g(w)}{w - z} = \sum_{k=0}^{\infty} g(w) \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}}$$

absolut und gleichmäßig für alle w und z (da g auf $\gamma(I)$ beschränkt ist). Es folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w - z} dw \\ &= \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} g(w) \frac{(z - z_0)^k}{(w - z_0)^{k+1}} dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \right) (z - z_0)^{k+1} \end{aligned}$$

wobei wir das Integral mit der Reihe wegen der gleichmäßigen, absoluten Konvergenz vertauschen dürfen. Also ist $f(z)$ auf U durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt. $\square$

Korollar 3.26. *Eine auf ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion kann durch eine auf $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe dargestellt werden.*

Beweis. Kombiniere die letzten beiden Sätze (und den Identitätssatz). $\square$

Korollar 3.27 (Verallgemeinerte Cauchysche Integralformeln). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und γ ein geschlossener Weg in $U \setminus \{a\}$. Dann gilt*

$$n(\gamma, a) f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz .$$

Beweis. Es gilt in einer Umgebung von a einerseits

$$n(\gamma, a)f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} n(\gamma, a) \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$$

und andererseits durch Kombination von Satz 3.24 und Satz 3.25 (genauer dessen Beweis)

$$\begin{aligned} n(\gamma, a)f(z) &= \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w-a)^{k+1}} dw \right) (z-a)^{k+1} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung. □

Jetzt beweisen wir einen der Hauptsätze dieser Vorlesung:

Satz 3.28. *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig komplex differenzierbare Abbildung. Dann ist f analytisch. Genauer kann für jedes $z_0 \in U$ die Abbildung f in eine Potenzreihe in z_0 entwickelt werden die für jede Kreisscheibe $D_r(z_0)$ konvergiert die ganz in U liegt.*

Beweis. Wir nehmen obdA an, dass $z_0 = 0$ und $\overline{D_1(0)} \subseteq U$ (sonst verschieben und Strecken wir $\mathbb{C}$). Für jedes fixierte $z \in D_1(0)$ und jedes $0 \leq \lambda \leq 1$ sowie $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| z + \lambda(e^{it} - z) \right| = \left| (1-\lambda)z + \lambda e^{it} \right| \leq 1 - \lambda + \lambda = 1 .$$

Daher können wir die Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad \lambda \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \lambda(e^{it} - z)) - f(z)}{e^{it} - z} e^{it} dt$$

betrachten. Nach den üblichen Sätzen ist g stetig und in jedem Punkt des offenen Intervalls differenzierbar (weil der Integrand stetig diffbar) mit

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = \int_0^{2\pi} f'(z + \lambda(e^{it} - z)) e^{it} dt .$$

Dieses Integral kann man für $\lambda \neq 0$ ausrechnen als

$$\frac{1}{i\lambda} f(z + \lambda(e^{it} - z)) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Daher ist g konstant (da stetig und auf $(0, 1)$ konstant) und wegen

$$g(0) = \int_0^{2\pi} \frac{f(z) - f(z)}{e^{it} - z} e^{it} dt = 0$$

folgt $g = 0$. Also

$$0 = g(1) = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) - f(z)}{e^{it} - z} e^{it} dt = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma_1} \frac{1}{w - z} dz$$

Also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw .$$

für jede $z \in D_1(0)$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 3.25. $\square$

In Wahrheit ist die Voraussetzung, dass f stetig differenzierbar ist redundant. Wir werden dies in den Übungen sehen und von nun an verwenden. Wir fassen also nochmal die Hauptresultate bisher zusammen:

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$.

1. f ist analytisch und es gilt die Taylorentwicklung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k$ für jede Kreisscheibe mit $D_r(a) \subseteq U$.
2. Es existieren Stammfunktionen auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $V \subseteq U$ (insbesondere auf Kreisscheiben).
3. Es gelten Eindeutigkeitsätze: Die Nullstellen von f sind isoliert.
4. Die Abbildung f ist offen (insbesondere gilt das Maximumsprinzip).
5. Es gelten die (verallgemeinerten) Cauchyschen Integralformeln

$$n(\gamma, a) f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz .$$

Typischerweise wird man einen Pfad wählen der eine Kreisscheibe umläuft, sodass $n(\gamma, a) = 1$.

4 Der Residuensatz

4.1 Laurentreihen

Definition 4.1. Seien $0 \leq r < R$. Dann haben wir das Ringgebiet

$$S_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\} .$$

Sein innerer Rand ist der Pfad $\gamma_r = r \exp(2\pi i t)$ und sein äußerer Rand der Pfad $\gamma_R = R \exp(2\pi i t)$ für $t \in [0, 1]$.

Lemma 4.2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Falls für $0 < r < R$ gilt $\overline{S_{r,R}} \subseteq U$, so gilt für $z \in S_{r,R}$ die Beziehung

$$2\pi i \cdot f(z) = \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw .$$

Beweis. Wie im Beweis der Cauchyschen Integralformeln 3.24 betrachten wir für fixes $z \in S_{r,R}$ die Abbildung $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{für } w \neq z \\ f'(z) & \text{für } w = z \end{cases}$$

Diese ist analytisch auf U (wie zuvor). Es folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass wir die Gleichheit

$$\int_{\gamma_r} g(w)dw = \int_{\gamma_R} g(w)dw$$

haben. Wir finden

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} g(w)dw &= \int_{\gamma_r} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw \\ &= \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}dw - 2\pi i \cdot n(\gamma_r, z)f(z) = \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}dw \end{aligned}$$

und analog

$$\int_{\gamma_R} g(w)dw = \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}dw - 2\pi i n(\gamma_R, z)f(z) = \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}dw - 2\pi i f(z) .$$

Zusammen ergibt das die behauptete Formel. □

Satz 4.3. Sei $f : S_{r,R} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch (hier ist $r = 0$ erlaubt). Dann gilt:

1. Es gibt Potenzreihen

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

die für $|z| < R$ konvergiert und

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (1/z)^n$$

in $1/z$ die für $|z| > r$ konvergiert (i.e. $|\frac{1}{z}| < \frac{1}{r}$) sodass in $S_{r,R}$ gilt

$$f(z) = g(z) + h(z) .$$

2. Die Potenzreihen aus (1) sind eindeutig bestimmt.

3. Für jeden geschlossenen Pfad γ in $S_{r,R}$ gilt

$$n(\gamma, 0)a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw \quad \text{und} \quad n(\gamma, 0)b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)w^{n-1}dw$$

Beweis. Wie üblich wählen wir zunächst $r < r' < R' < R$, arbeiten also auf einem ein bisschen kleineren Ringgebiet $S_{r',R'}$. Es reicht die Behauptungen dort zu zeigen. Dort können wir aber das vorige Lemma 4.2 anwenden.

Aus Satz 3.25 wissen wir, dass der Ausdruck

$$\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

auf $D_{R'}(0)$ durch eine Potenzreihe (in z) mit Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

dargestellt wird. Analog wollen wir den Ausdruck

$$\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

entwickeln. Wir haben $|z| > r' = |w|$ und schreiben

$$-\frac{f(w)}{w-z} = f(w) \frac{1}{z(1-\frac{w}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} f(w) w^n z^{-(n+1)}$$

Nachdem wir z' weiter vergrößern konvergiert die Reihe gleichmäßig für alle w und z . Also bekommen wir

$$\int_{\gamma_{r'}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int \sum_{n=0}^{\infty} f(w) w^n z^{n-1} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int f(w) w^n dw \right) z^{-(1+n)}.$$

Zusammen beweist dies Teil (1).

Für Teil (2) und (3) nehmen wir an, dass $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ auf $S_{r',R'}$. Diese Reihen können als gleichmäßig konvergent angenommen werden. Dann gilt für jeden geschlossenen Pfad γ und jede ganze Zahl m die Beziehung

$$\int_{\gamma} z^{m-1} f(w) dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} w^{n+m-1} dw + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\gamma} w^{m-n-1} dw$$

Das Integral $\int_{\gamma} w^k dw$ ist null für $k \neq -1$ da w^k in allen anderen Fällen eine Stammfunktion hat. Also erhalten wir, dass $\int_{\gamma} z^{m-1} f(w) dw$ genau durch einen Term in der Darstellung multipliziert mit der Umlaufzahl gegeben ist, was die Behauptung (3) impliziert. Da die Koeffizienten aus $f(z)$ gewonnen werden können folgt daraus auch Teil (2). $\square$

Beispiel 4.4. Betrachte die gebrochen rationale Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$$

die auf $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$ definiert ist. Eine Partialbruchzerlegung liefert

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3}.$$

Wir wollen auf dem Ringgebiet $S_{1,3}$ arbeiten. Für z darin gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \\ \frac{1}{z-3} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

Also gilt für $z \in S_{1,3}$:

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Definition 4.5. Eine unendliche Reihe der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ heisst konvergent wenn die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n$ konvergieren und der Grenzwert ist die Summe. Analog ist absolute und (lokal) gleichmäßige Konvergenz für Reihen dieser Form definiert. Eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0 ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Wir erhalten direkt aus Satz 4.3 folgende Konsequenz

Korollar 4.6. Sei $f : D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

wobei die rechte Seite lokal gleichmäßig konvergiert und für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

wobei $0 < r' < r$ und $\gamma_{r'}(t) = r' \exp(2\pi i t)$ für $t \in [0, 1]$.

Beweis. Wende den Satz 4.3 an mit $a_{-n} = b_n$. □

Definition 4.7. In der Situation von Satz 4.6 (oder für eine Abbildung $U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$) führen wir folgende Notation ein:

1. Die Funktion $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$ heisst Hauptteil von f^2 und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ heisst Nebenteil von f . Die eindeutige Zerlegung

$$f(z) = g(z) + h(z)$$

heisst Laurentzerlegung von f .

²Oftmals wird auch $h(1/z)$ als Hauptteil bezeichnet, da dies dann eine Potenzreihe ist.

2. Ist der Hauptteil $h(z) \neq 0$ so sagen wir, dass z_0 eine isolierte Singularität von f ist.
3. Falls $h(1/z)$ ein Polynom von Grad n in $(z - z_0)$ ist (i.e. n ist maximal mit $a_{-k} = 0$ für $k < n$), so sagen wir, dass die Singularität in z_0 ein Pol n -ter Ordnung ist.
4. Falls $h(z)$ eine echte Potenzreihe ist (i.e. unendlich viele Koeffizienten ungleich 0 hat) so sagen wir, dass z_0 eine wesentliche Singularität ist.
5. Allgemein definieren wir die Ordnung von f in z_0 wie folgt:
 - $\omega(f, z_0) = -\infty$ falls wesentliche Singularität
 - $\omega(f, z_0) = -n$ falls Pol n -ter Ordnung (negatives Vorzeichen!).
 - $\omega(f, z_0) = n$ falls der Hauptteil null ist und f eine Nullstelle n -ter Ordnung in z_0 hat
 - $\omega(f, z_0) = \infty$ falls $f = 0$.

Beispiel 4.8. 1. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2} \exp(z)$ die auf $\mathbb{C} \setminus 0$ definiert ist hat in $z = 0$ einen Pol 2.ter Ordnung.

2. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2} \sin(z)$ die auch auf $\mathbb{C} \setminus 0$ definiert ist hat in 0 einen Pol 1.ter Ordnung.
3. Die Funktion $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ ist auf $\mathbb{C} \setminus 0$ definiert und hat im Nullpunkt eine wesentliche Singularität.

Wir halten noch folgende elementare Eigenschaften der Ordnung fest, die direkt aus der Definition folgen. Dazu seien $f, g : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch für U offenes Gebiet

1. $\omega(f + g, z_0) \geq \min(\omega(f, z_0), \omega(g, z_0))$
2. $\omega(fg, z_0) = \omega(f, z_0) + \omega(g, z_0)$ falls beide Zahlen endlich sind.
3. Falls $\omega(f, z)$ endlich ist gilt

$$f(z) = (z - z_0)^{-\omega(f, z_0)} f_1(z)$$

wobei $f_1(z)$ auf U analytisch ist und in z_0 keine Nullstelle hat (i.e. Ordnung 0 hat).

4. Falls $\omega(f, z_0)$ endlich ist, so ist nach eventuellem Verkleinern von U auch f^{-1} auf $U \setminus \{z_0\}$ definiert und es gilt $\omega(f^{-1}, z_0) = -\omega(f, z_0)$.

Definition 4.9. Sei $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann heisst z_0 eine hebbare Singularität wenn es eine analytische Funktion $\bar{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\bar{f}|_{U \setminus \{z_0\}} = f$ gibt.

Satz 4.10 (Riemannscher Hebbarkeitssatz). *Für eine analytische Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent*

1. $\omega(f, z_0) \geq 0$, i.e. der Hauptteil in z_0 verschwindet.
2. z_0 ist eine hebbare Singularität
3. die Funktion f ist auf einer Umgebung von z_0 beschränkt.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Wir können wir den Nebenteil als $\bar{f}$ nehmen.

(2) $\Rightarrow$ (3): Klar, da jede analytische Funktion stetig und damit auf einer kompakten Kreisscheibe (die eine Umgebung ist) beschränkt ist.

(3) $\Rightarrow$ (1): Nach Satz 4.3 gilt die Formel

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw$$

für ein kleines r' (wobei $\gamma_{r'}$ der Pfad ist der z_0 umläuft). Wir nehmen an, dass $|f(z)|$ in einer kleinen Umgebung durch $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ nach oben beschränkt ist. Dann ist $|a_{-n}|$ beschränkt durch

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_{r'}} M \cdot (r')^{n-1} dw = \frac{M(r')^{n-1}}{2\pi} L(\gamma_{r'}) = M(r')^n$$

Da wir r' beliebig klein wählen können folgt $a_{-n} = 0$ für $n \geq 1$. □

Insbesondere muss jede Umgebung jeder Singularität auf eine unbeschränkte Menge von $\mathbb{C}$ abgebildet werden. Wir beenden dieses Kapitel mit einem Zitat des folgenden Ergebnisses, dass zeigt wie extrem wesentliche Singularitäten sind

Satz 4.11 (Satz von Picard). *Sei z_0 eine wesentliche Singularität der analytischen Funktion $f : U \setminus \{z_0\}$. Dann gilt einer der beiden folgenden Möglichkeiten:*

- Für jede Umgebung V von z_0 in U gilt $f(V \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C}$
- Für jede Umgebung V von z_0 in U gilt $f(V \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C} \setminus \{c\}$ für ein $c \in \mathbb{C}$.

Eine analytische Funktion nimmt in der Nähe jeder wesentlichen Singularität jeden Punkt mit Ausnahme höchstens eines Punktes an. Sie hat also ein extrem ‘nervöses’ Verhalten in der Nähe der Singularität. Den Beweis können wir mit den aktuellen Methoden nicht erbringen (siehe Grauert-Remmert). (AUFGABE: finde Beispiele)

4.2 Residuen

Wir hatten schon im Beweis von Satz 4.3 gesehen, dass für jeden geschlossenen Weg γ das Integral $\int_{\gamma} z^k dz$ für $k \neq -1$ verschwindet, weil die monomiale Funktion $z \mapsto z^k$ dann eine Stammfunktion hat. Dies legt eine besondere Rolle des Koeffizienten a_{-1} in einer Laurententwicklung nahe.

Definition 4.12. Sei $f : D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Der Koeffizient a_{-1} in der Laurentreihenentwicklung von f um z_0 wird das Residuum von f in z_0 genannt. Wir schreiben $a_{-1} = \text{Res}_{z_0} f$. Für eine Funktion $f : U \setminus \{z_0\}$ ist das Residuum definiert für eine Kreisschreibe in U um z_0 (und hängt nicht von der Kreisschreibe ab wegen des Eindeutigkeitssatzes für Laurentreihen).

Offensichtlich ist das Residuum für hebbare Singularitäten gleich 0. Nach Satz 4.3 können wir das Residuum von f in z_0 berechnen als

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} f(w) dw .$$

für r' klein genug. Dieses Integral ist möglicherweise die bessere Definition des Residuums.

Beispiel 4.13. • Betrachte die Funktion $f(z) = \frac{\sin(z)}{z} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$. Sie hat in 0 eine hebbare Singularität, also gilt $\text{Res}_0 f = 0$.

- Betrachte $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2}$. Es gilt $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}z + \dots$. Also gilt $\text{Res}_0 f = 1$.
- Für $f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$ gilt analog $\text{Res}_0 f = 1$.
- Für $f(z) = \exp(\frac{1}{z}) = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \dots$ gilt $\text{Res}_0 f = 1$.
- Für $f(z) = \exp(\frac{1}{z^2}) = 1 + z^{-2} + \dots$ gilt $\text{Res}_0 f = 0$.

Satz 4.14 (Residuensatz). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $S \subseteq U$ eine Menge isolierter Punkte (nicht notwendigerweise endlich) und $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt für jeden geschlossenen Pfad γ in $U \setminus S$ die Formel

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in S} n(\gamma, s) \text{Res}_s f$$

wobei auf der rechten Seite nur endlich vielen Glieder von null verschieden sind.

Bemerkung 4.15. Der Residuensatz verallgemeinert offensichtlich die (verallgemeinerten) Cauchy'schen Integralformeln.

Zum Beweis des Residuensatzes erinnern wir daran, dass für eine analytische Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ sich der Hauptteil fortsetzen lässt zu einer analytischen Abbildung $h : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$, da die entsprechende Potenzreihe nach Satz 4.3 konvergent ist.

Beweis des Residuensatzes (Satz 4.14). Hebbare Singularitäten tragen zur rechten Seite der zu zeigenden Gleichheit offensichtlich nicht bei, daher können wir obda annehmen, dass all hebbaren Singularitäten gehoben sind und S nur aus echten Singularitäten besteht.

Da S nur aus isolierten Punkten besteht schneidet es jede kompakte Teilmenge K nur in endlich vielen Punkten (der Durchschnitt $K \cap S$ ist kompakt und diskret, also endlich). Wir betrachten die Menge $\{x \in U \setminus S \mid n(\gamma, x) \neq 0\}$. Diese ist nach Lemma 3.23 beschränkt, da Sie in einer großen Kreisscheibe enthalten ist. Also folgt, dass der Abschluss K dieser Menge kompakt ist (dieser Abschluss ist die Vereinigung mit dem Bild des Pfades) und somit, dass nur endlich viele Punkte von S im ‘Inneren’ des Pfades liegen können. Es folgt, dass die Summe auf der rechten Seite endlich ist.

Nun wählen wir eine punktierte Nullhomotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ von γ in U . Das Bild $\text{Im}H$ ist kompakt. Dann ist auch $\text{Im}H \cup K$ kompakt. Wir betrachten die endliche Teilmenge $S_0 \subseteq S$ die aus den Punkten besteht die in $\text{Im}H \cup K$ liegen. Für jeden Punkt $s \in S$ betrachten wir den Hauptteil $h_s(z)$ der wie oben bemerkt eine analytische Abbildung $\mathbb{C} \setminus \{s\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist.

Wir können also die Abbildung

$$g(z) = f(z) - \sum_{s \in S_0} h_s(z)$$

betrachten die eine Abbildung $U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ ist. In jedem Punkt $s \in S_0$ hat g aber verschwindenden Hauptteil, sodass wir diese Singularitäten heben können. Daher haben wir eine analytische Abbildung $g : U \setminus (S \setminus S_0) \rightarrow \mathbb{C}$. In dem Definitionsbereich ist aber γ per Konstruktion homotop zu einem konstanten Pfad. Also gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{s \in S_0} \int_{\gamma} h_s(z) dz .$$

Wir berechnen aber für ein fixiertes $s \in S_0$ die rechte Seite also

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} h_s(z) dz &= \int_{\gamma} \left(\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-s)^n \right) dz \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} \int_{\gamma} a_n (z-s)^n dz = a_{-1} \int_{\gamma} \frac{1}{z-s} dz = a_{-1} 2\pi i n(\gamma, s) . \end{aligned}$$

Zusammen impliziert dies die Behauptung. □

4.3 Anwendungen des Residuensatzes

Es zeigt sich, dass der Residuensatz extrem effektiv zur Benutzung von Integralen benutzt werden kann. Überraschenderweise kann man ihn sogar benutzen rein reelle Integrale zu berechnen die a priori gar nichts mit den komplexen Zahlen oder Funktionentheorie zu tun haben.

Beispiel 4.16. Wir wollen das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt$$

für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ berechnen ³. Mit der Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 2az + 1}$$

finden wir

$$\begin{aligned} -i \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}}{e^{2it} + 2ae^{it} + 1} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{e^{it} + 2a + e^{-it}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt . \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $z^2 + az + 1$ sind gegeben durch $z_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, diese sind also wegen $a > 1$ beide reell. Es gilt ausserdem, dass die Nullstelle $z_+ := -a + \sqrt{a^2 - 1}$ innerhalb des Einheitskreises liegt und die andere z_- außerhalb. Wir finden⁴

$$\operatorname{Res}_{z_+} f = \operatorname{Res}_{z_+} \frac{2}{(z - z_+)(z - z_-)} = \frac{2}{z_+ - z_-} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} .$$

Nach dem Residuensatz erhalten wir dann

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt = -i \int_{\gamma_1} f(z) dz = 2\pi \operatorname{Res}_{z_+} f = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} .$$

Bemerkung 4.17. Allgemeiner funktioniert diese Methode für Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$$

für $R(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ mit Polynomen p und q in zwei Variablen sodass q keine Nullstellen auf dem Einheitskreis hat. Die Funktion f ist dann durch

$$f(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

gegeben.

Wir erinnern an den Begriff des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$ und die absolute Integrierbarkeit, die so definiert ist, dass $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r g(t) dt$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 g(t) dt$ getrennt existieren. Natürlich existiert dann auch $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r g(t) dt$, die Umkehrung gilt aber nicht.

³Versuchen Sie gerne dieses Integral anders auszurechnen. Dies ist möglich, aber sehr trickreich

⁴ Sei eine Funktion f von der Form $f(z) = \frac{1}{z} g(z)$ mit g holomorph in 0. Dann ist $\operatorname{Res}_0 f = g(0)$.

Im Folgenden betrachten wir Funktionen $f : \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ wobei endlich viele Singularitäten in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ liegen und keine auf der reellen Achse. Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ berechnen (unter der Annahme, dass es existiert). Wir wählen eine Kreisscheibe, die alle Singularitäten in der oberen Halbebene enthält und integrieren über den Weg

$$\gamma_r^H(t) = \gamma_r'(t) * L_{-r,r}$$

wobei $\gamma_r'(t) = r \exp(it)$ für $t \in [0, \pi]$ der Halbkreisweg von r nach $-r$ ist und $L_{-r,r}$ die Gerade zurück:

(Bild).

Jetzt erhalten wir

$$\int_{-r}^r f(x)dx = \int_{\gamma_r^H} f(z)dz - \int_{\gamma_r'(t)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}_{a_i} f - \int_{\gamma_r'(t)} f(z)dz$$

Nun betrachten wir den Limes für $r \rightarrow \infty$ und hoffen, dass der zweite Summand verschwindet und wir schon wissen, dass das Integral existiert.

Satz 4.18. *Seien $p(x)$ und $q(s)$ zwei polynomialen Funktionen mit reellen Koeffizienten. Es gelte $\text{grad}(q) \geq \text{grad}(p) + 2$ und $q(x) \neq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$. Betrachte die rationale Funktion $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ die keine Pole auf der reellen Achse hat. Dann gilt*

1. *Die Funktion $R(x)$ is absolut integrierbar über $\mathbb{R}$.*
2. *Das Integral ergibt sich zu*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{a_j} R$$

wobei $a_1, \dots, a_k$ die Pole der Funktion $R(z)$ in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ sind.

Beweis. Die Funktion $R(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Wir können $R(x)$ für $z \neq 0$ schreiben als $\frac{R(z) \cdot z^2}{z^2}$ wobei $R(z)z^2$ ein Quotient von Polynomen ist, sodass der Grad des Nenners größer gleich dem Grad des Zählers ist. Insbesondere ist $|R(z)z^2|$ außerhalb einer Kreisscheibe beschränkt durch ein $M \in \mathbb{R}$ für $|z| > c$. Daher haben wir

$$|R(z)| \leq \frac{1}{z^2} M \quad \text{für alle } |z| > c .$$

Daher gilt für $r > c$:

$$\begin{aligned}\int_0^r |R(x)|dx &\leq \int_0^c |R(x)|dx + \int_c^r |R(x)|dx \\ &= \int_0^c |R(x)|dx + M \cdot \int_c^r \frac{1}{x^2}dx \\ &= \int_0^c |R(x)|dx + M\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{c}\right) \\ &\leq \int_0^c |R(x)|dx + \frac{M}{c} \leq \infty\end{aligned}$$

Wir schließen, dass $\int_0^\infty R(x)dx$ existiert. Analog schließt man, dass $\int_{-\infty}^0 R(x)dx$ existiert. Somit ist R über $\mathbb{R}$ (absolut) integrierbar.

Wir betrachten nun für $r > 0$ den Pfad

$$\gamma_r^H(t) = \gamma_r'(t) * L_{-r,r}$$

wie oben. Wir wählen den Halbkreis so, dass er alle Nullstellen von q in der oberen Halbebene umschließt. Es folgt aus dem Residuensatz

$$\int_{-r}^r R(x)dx + \int_H R(z)dz = \int_{\gamma^r} R(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{a_j} R.$$

Wir schätzen das Integral über den Halbkreis ab durch

$$\begin{aligned}\left| \int_H R(z)dz \right| &= \left| \int_0^\pi R(re^{it})rie^{it}dt \right| \\ &\leq r \cdot \int_0^\pi |R(re^{it})|dt \\ &\leq r \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \pi = \frac{M\pi}{r}\end{aligned}$$

Dies geht für $r \rightarrow \infty$ gegen 0. Da ausserdem

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r R(x)dx = \int_{-\infty}^\infty R(x)dx$$

folgt die Behauptung. □

Beispiel 4.19. Wir wollen

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$$

berechnen. Die Nullstellen des Nenners sind i und $-i$. Also erhalten wir nach dem vorigen Satz, dass dieses Integral gegeben ist durch

$$2\pi i \cdot \text{Res}_i \frac{1}{z^2+1} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Dieses Integral kann man natürlich auch rein reell ausrechnen indem man benutzt, dass der Arcustangens die Stammfunktion von $\frac{1}{x^2+1}$ ist.

Bemerkung 4.20. Ähnlich wie oben kann man Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx$$

berechnen (und somit auch $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(x)dx$ und $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin(x)dx$). Man zeigt genau wie in Satz 4.18, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{a_j} (R(z)e^{iz})$$

wobei die Summe über die Polstellen a_j in der oberen Halbebene geht.

5 Riemannsche Flächen

Wir haben schon gesehen, dass sich wichtige Funktionen wie die Quadratwurzel oder der Logarithmus nicht auf der ganzen komplexen Ebene $\mathbb{C}$ definieren lassen. Es ist unbefriedigend, aus $\mathbb{C}$ ad hoc eine Teilmenge wie die negative reelle Halbachse herauszunehmen. In beiden Fällen würde man gerne Funktionen betrachten, die mehrere Werte annehmen, etwa $\pm\sqrt{z}$ oder $\ln(z) + 2\pi in$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Da dies aber nicht widerspruchsfrei möglich ist, werden wir die Funktionen auf einer mehrblättrigen Fläche über der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ definieren, die für jeden gewünschten Funktionswert ein Blatt hat. Hierbei machen wir uns gleich von der Voraussetzung frei, über der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ zu arbeiten und betrachten allgemeinere Flächen.

5.1 Definition

Sei X ein topologischer Raum. Eine komplexe Karte (im Sinne von Riemannschen Flächen) auf X ist ein Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ von einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ zu einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{C}$. Zwei Karten $\varphi : U_1 \rightarrow V_1$ und $\psi : U_2 \rightarrow V_2$ heißen biholomorph verträglich, falls der Kartenwechsel

$$\psi \circ \varphi_1^{-1} : \varphi(U_1 \cap U_2) \rightarrow \psi(U_1 \cap U_2)$$

eine biholomorphe Abbildung ist. Ein komplexer Atlas $\mathcal{A}$ ist eine Menge von Karten die paarweise biholomorph verträglich sind und die X überdecken. Zwei Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen äquivalent falls alle enthaltenen Karten biholomorph verträglich sind, d.h. falls $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ebenfalls ein Atlas ist.

Definition 5.1. Eine Riemannsche Fläche ist ein zweitabzählbarer⁵ topologischer Hausdorff Raum zusammen mit einer Äquivalenzklasse von komplexen Atlanten.

⁵Dies bedeutet, dass es eine abzählbare Basis der Topologie gibt, d.h. eine Folge von offenen Mengen $U_1, U_2, U_3, \dots$ sodass jede offene Menge in X eine Vereinigung von Mengen aus der Liste ist.

Man kann stets einen maximalen Atlas wählen und eine Karte auf einer Riemannschen Fläche ist eine Karte dieses maximalen Atlases. Es gilt der überraschende Satz von Radó, dass für eine zusammenhängende Riemannsche Fläche die zweitabzählbarkeit bereits aus den anderen Axiomen folgt. Dies ist in anderen Dimensionen und für reelle Mannigfaltigkeiten hochgradig falsch. Wir werden uns hauptsächlich für zusammenhängende Riemannsche Flächen interessieren.

Beispiel 5.2. 1. Die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ ist eine Riemannsche Fläche mittels der Identität als Karte.

2. Offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind Riemannsche Flächen. Insbesondere Gebiete.

3. Die Riemannsche Zahlenkugel bzw. der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ die als Menge $\mathbb{C} \cup \infty$ ist.

Die Topologie ist gegeben wie folgt: Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ heisst offen, falls $U \cap \mathbb{C}$ offen ist und falls Sie, wenn gilt $\infty \in U$ auch das komplement eines Kompaktums $K \subseteq \mathbb{C}$ enthält. (Dies ist die 1-Punkt Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$).

Eine Atlas ist gegeben durch die Karten $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \infty = \mathbb{C}$ mit der Identität und $U_2 = \mathbb{P}^1 \setminus 0$ mit der Karte $\varphi : \mathbb{P}^1 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$ die $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ auf $1/z$ sendet und ∞ nach 0. Diese Abbildung ist offensichtlich eine Bijektion und kann auch leicht als Homöomorphismus erkannt werden. Die Karten sind biholomorph verträglich da der Kartenwechsel durch

$$\mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 \quad z \mapsto \frac{1}{z}$$

gegeben ist.

BILD

4. Komplexe Tori: Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter, d.h. eine diskrete abelsche Untergruppe sodass $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$. Dann ist Γ von der Form

$$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 .$$

mit ω_1, ω_2 über $\mathbb{R}$ -linear unabhängig. Wir betrachte die Quotientengruppe $\mathbb{C}/\Gamma$. Diese wird ein topologischer Raum mittels der Quotiententopologie (klar?). Lokal in dem Urbild ist $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ ein Homöomorphismus. Wir können also die lokale Umkehrung als Karte definieren und der Kartenwechsel ist durch Addition von Elementen in Γ gegeben.

Beachte: Als reelle Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{C}/\Gamma \simeq S^1 \times S^1$. Aber es ist ein interessante Frage wann zwei solche Tori als komplexe Mannigfaltigkeiten isomorph sind. Dies ist nicht immer der Fall.

Definition 5.3. Seien X und Y Riemannsche Flächen. Eine stetige Abbildung $X \rightarrow Y$ ist holomorph, falls für jedes Paar von Karten $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1 \subseteq \mathbb{C}$ und $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2 \subseteq \mathbb{C}$ mit $U_1 \subseteq X$ und $U_2 \subseteq Y$ sowie $f(U_1) \subseteq U_2$ die induzierte Abbildung

$$V_1 \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} U_1 \rightarrow U_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{C}$$

holomorph ist. Eine Abbildung heisst biholomorph wenn es eine holomorphe Umkehrabbildung gibt. Ebenso definiert man holomorphe Abbildungen auf offenen Teilmengen von Riemannschen Flächen (diese sind selbst Riemannsche Flächen) und bezeichnet für $U \subseteq X$ offen den Ring der holomorphen Funktionen $U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\mathcal{O}(U)$.

Natürlich ist die Identität holomorph und die Komposition von holomorphen Abbildungen ist holomorph. Insbesondere bilden Riemannsche Flächen und holomorphe Abbildungen eine Kategorie. Es gelten viele der Sätze die wir für Gebiete bewiesen haben für zusammenhängende Riemannsche Flächen.

Satz 5.4 (Identitätssatz). Seien $f, g : X \rightarrow Y$ Abbildung zwischen Riemannschen Flächen wobei X zusammenhängend sei. Falls $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ einen Häufungspunkt hat so gilt $f = g$.

Beweis. Wir betrachten die Teilmenge $A \subseteq X$ definiert als

$$A := \{a \in X \mid \text{Es gibt eine Umgebung } V \text{ von } a \text{ in der } f = g\}$$

1. Diese ist offen.
2. Wir behaupten, dass Sie auch abgeschlossen ist. Dazu sei $a \in X$ ein Randpunkt von A . Die Stetigkeit von f und g impliziert, dass $f(a) = g(a)$. Wir entwickeln f und g um den Punkt a in lokale Potenzreihen und wenden Satz 2.5 an.
3. Sie ist nicht-leer, mit dem gleichen Argument wie in (2).

Da A offen und abgeschlossen ist, folgt $A = X$. □

Satz 5.5 (Riemannscher Hebbarkeitssatz). Sei $U \subseteq X$ offen und $a \in U$. Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ lässt sich genau dann zu einer Funktion $\bar{f} \in \mathcal{O}(U)$ fortsetzen (notwendigerweise eindeutig) wenn Sie in einer Umgebung von a beschränkt ist.

Beweis. Dies ist eine lokale Frage. Für U klein genug ist dies der klassische Riemannsche Hebbarkeitssatz. □

Wir werden von nun an lokal definierte Eigenschaften holomorpher Funktionen ohne weiteres auf Riemannsche Flächen anwenden. Sei zum Beispiel $f : X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. So sagen wir, sie habe in $a \in X$ einen Pol (eine wesentliche/hebbare Singularität), falls für eine Kartenumgebung $U \subseteq X$ mit Karte $U \simeq V \subseteq \mathbb{C}$ gilt, dass die induzierte Funktion $\bar{f} : V \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ in z_0 einen

Pol (wesentliche/hebbare Singularität) besitzt. Man überlegt sich leicht, dass dies unabhängig von der Wahl der Karte ist.

Wir erinnern daran, dass man einen Pol in z_0 dadurch charakterisieren kann, dass $\lim_{z \rightarrow z_0} |\tilde{f}(z)| = \infty$. Dies folgt daraus, dass dies für einen Pol (offensichtlich) erfüllt ist und für eine wesentliche Singularität falsch ist (da jede Umgebung dicht liegt). Man kann dies auch durch einfaches nachrechnen sehen. Es folgt sofort, dass $f : X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ einen Pol in $a \in X$ hat falls $\lim_{z \rightarrow a} |\tilde{f}(z)| = \infty$. Diese wird oft als Definition eines Poles genommen, da es eine intrinsischere Eigenschaft ist (die Koeffizienten der Laurententwicklung hängen von der Wahl der Karte ab).

Definition 5.6. Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine meromorphe Funktion auf X ist eine holomorphe Funktion $X \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ wobei $A \subseteq \mathbb{C}$ diskret in X ist und jedes $a \in A$ ein Pol ist (und keine wesentliche Singularität).

Satz 5.7. Sei X zusammenhängend⁶. Meromorphe Funktionen auf X sind in kanonischer Bijektion zu holomorphen Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ die nicht konstant gleich ∞ sind.

Beweis. Sei $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ holomorph und nicht konstant gleich ∞ . Dann ist nach dem Identitätssatz $\tilde{f}^{-1}(\infty) =: A$ diskret und die Einschränkung

$$f : X \setminus A \rightarrow \mathbb{P}^1$$

faktoriisiert durch $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}^1$ und ist holomorph. Außerdem ist sie meromorph, denn für jedes $a \in A$ gilt, dass $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ (fast alle Folgenglieder liegen außerhalb eines Kompaktrums).

Umgekehrt betrachten wir für eine gegebene Abbildung f die Erweiterung

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in X \setminus A \\ \infty & z \in A \end{cases}$$

die eine stetige Abbildung $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ ist. Aufgrund des Hebbarkeitssatzes ist sie dann auch holomorph (in den Punkten von A , in allen anderen Punkten ist es ohnehin klar). $\square$

Beispiel 5.8. Sei p ein Polynom. Dann ist $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Es gilt $\lim_{z \rightarrow \infty} |p(z)| = \infty$. Also ist $p \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$, d.h. wir können es auffassen als meromorphe Abbildung $p : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Korollar 5.9. $\mathcal{M}(X)$ ist ein Körper für X zusammenhängend.

Beweis. Die Summe, Produkt von meromorphen Funktionen sind wie üblich definiert. Falls eine Funktion f nicht identisch Null ist, so hat sie nur endlich viele Nullstellen und diese haben endliche Ordnung (wegen des Identitätssatzes). Also existiert der Quotient in $\mathcal{M}(X)$, da eine Nullstelle n -ter Ordnung lokale einen Pol n -ter Ordnung gibt. $\square$

⁶Man kann diese Voraussetzung auch weglassen, muss den Satz dann geeignet anpassen

Bemerkung 5.10. Algebraisch ist für nicht kompakte Riemannsche Flächen X der Körper $\mathcal{M}(X)$ der Quotientenkörper des Ringes $\mathcal{O}(X)$. Mit anderen Worten: jede meromorphe Funktion ist Quotient von holomorphen Funktionen. Dies werden wir hier allerdings nicht zeigen, da man dafür den Weierstraß'schen Produktsatz benötigt. Die Idee ist einfach zu einer gegebenen meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ eine holomorphe Funktion g zu finden, sodass $f \cdot g$ holomorph ist. Dazu muss g in einem Punkt a der ein Pol n -ter Ordnung von f ist offensichtlich eine Nullstelle mindestens n -ter Ordnung haben. Falls $X = \mathbb{C}$ und A eine endliche Menge ist, so kann man dies leicht durch einen Ansatz der Form

$$g(z) = \prod_{a \in A} (z - a)^{-\omega(a)}$$

erreichen. Im Allgemeinen wird dieses Produkt aber nicht konvergieren und muss modifiziert werden.

Satz 5.11. *Lokal ist jede holomorphe (meromorphe) Abbildung von der Form $z \mapsto z^n$ für ein fixiertes n . Genauer: für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von Riemannschen Flächen und einen Punkt $x \in X$ existieren Karten U um x und V um $f(x)$ sodass die assoziierte Abbildung von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ von der Gestalt $z \mapsto z^n$ ist.*

Beweis. Vergleiche den Beweis von Satz 2.13. OBdA ist $f : U \rightarrow V$ eine Abbildung mit $U \subseteq \mathbb{C}$ und $V \subseteq \mathbb{C}$ offene Umgebungen von 0 mit $f(0) = 0$. Wir können annehmen, dass f eine Potenzreihe ist, also

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots \quad a_n \neq 0, n \geq 1.$$

Setze $h(z) = a_n + a_{n+1}z + \dots$. Dann existiert (wegen der biholomorphie der Wurfelfunktion um jeden Punkt $\neq 0$) eine holomorphe Abbildung g mit $g^n = h$ in einer Umgebung von 0. Also

$$f(z) = (zg(z))^n.$$

Die Abbildung $zg(z)$ ist lokal biholomorph (die Ableitung in 0 hoch n ist a_n). Also können wir diese Abbildung als Karte nehmen. $\square$

Definition 5.12. *Wir bezeichnen die Zahl n als die Vielfachheit mit der der Wert $f(z)$ im Punkt z angenommen wird.*

Man kann die Vielfachheit auch direkter wie folgt charakterisieren: es gibt beliebige kleine Umgebungen U von x und V von $f(x)$ sodass für jeden Punkt $v \in V \setminus f(x)$ gilt, dass $f^{-1}(v)$ die Kardinalität n hat.

Bemerkung 5.13. Hier mache ich eine Bemerkung über den Riemannschen Hebbbarkeitssatz: Angenommen wir haben eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Riemannschen Flächen sodass $f|_{X \setminus A} : X \setminus A \rightarrow Y$ holomorph ist für eine diskrete Teilmenge $A \subseteq X$. Dann ist f holomorph. Beweisen....

Beispiel 5.14. Sei p ein Polynom n -ten Grades $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots$. Dann ist $p : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ holomorph. Wir wollen das Verhalten bei ∞ -studieren: dazu betrachten wir die Komposition

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \setminus p^{-1}(0) & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}^1 \setminus 0 \\ \uparrow 1/z & & \downarrow 1/z \\ U \subseteq \mathbb{C} & & \mathbb{C} \end{array}$$

wobei U die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $p(1/z) \neq 0$. Es gilt $0 \in U$. Der Punkt ∞ wird in ∞ mit Vielfachheit n angenommen, denn es gilt:

$$\frac{1}{p(1/z)} = \frac{1}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{1-n} + \dots} = z^n \frac{1}{a_n + a_{n-1} z + \dots}$$

Warnung: die anderen Punkte können mit verschiedener Vielfachheit angenommen werden, nur die Summe ist immer gleich k . Zum Beispiel nimmt $z^2 + z$ den Wert 0 in 0 mit Vielfachheit 1 an. Der Wert 0 wird dann aber auch mit Vielfachheit 1 in -1 angenommen, sodass die Summe über die Vielfachheiten in den Urbildern immer k ist. Wir werden dies noch systematisch studieren.

Satz 5.15 (Gebietstreue). *Jede nicht-konstante holomorphe Abbildung auf einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche ist offen.*

Beweis. Offen zu sein ist eine lokale Eigenschaft. Also reicht es zu zeigen, dass $z \mapsto z^n$ (in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$) offen ist. Dies folgt aus Polarkoordinaten. [Alternativer Beweis: benutze den Satz über Gebietstreue]. $\square$

Korollar 5.16. *Seien X und Y zusammenhängende Riemannsche Flächen und $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung.*

1. *Falls f injektiv ist, so ist $f(X) \subseteq Y$ eine Riemannsche Fläche die biholomorph zu X ist.*
2. *Falls X kompakt ist und f nicht-konstant, so ist f surjektiv.*
3. *Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ hat eine komplexe Nullstelle.*
4. *Falls X kompakt und $Y = \mathbb{C}$, so ist f konstant (holomorphe Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen sind konstant)*
5. *Jede beschränkte Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant (Satz von Liouville)*

Beweis. Zu (1): Falls f injektiv ist, so muss lokal $f = z$ sein (es kann nicht z^k für $k \neq 1$ sein wegen der Injektivität). Also ist f lokal biholomorph und nicht-konstant. Dann ist aber f offen und $f(X)$ offen und die Umkehrabbildung holomorph.

Zu (2): Da f offen ist, ist $f(X)$ offen. Wegen Kompaktheit ist $f(X)$ kompakt und damit abgeschlossen. Also $f(X) = Y$.

Zu (3): p ist eine Abbildung $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Nach (2) ist sie surjektiv

Zu (4): Falls f nicht konstant ist, so ist f surjektiv und das Bild kompakt. Aber $\mathbb{C}$ ist nicht kompakt.

Zu (5): Nach dem Hebbarkeitssatz lässt sich f fortsetzen zu einer holomorphen Abbildung $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ die aber nach (4) konstant sein muss. $\square$

5.2 Überlagerungen

In diesem Kapitel nehmen wir an, dass alle Riemannschen Flächen zusammenhängend sind (die Sätze gelten mit den entsprechenden Modifikationen auch allgemeiner). Wir erinnern daran, dass jede nicht-konstante holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eine stetige, offene und diskrete Abbildung ist. Hier bedeutet diskret, dass die Urbilder von Punkten diskrete Teilmengen von X sind.

Definition 5.17. Sei $f : X \rightarrow Y$ holomorph und nicht-konstant (oder allgemeiner eine offene, diskrete stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen). Dann heisst ein Punkt $x \in X$ Verzweigungspunkt von f falls es keine Umgebung $U \subseteq X$ um x gibt sodass $f|_U$ injektiv ist.

Umgekehrt heisst f in x unverzweigt wenn es eine Umgebung U von x gibt sodass $f|_U$ injektiv ist.

Die Abbildung f heisst unverzweigt, falls sie keine Verzweigungspunkte hat.

Beispiel 5.18. 1. Die Abbildung $z^k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ hat für $k \geq 2$ genau einen Verzweigungspunkt in 0. Die Einschränkung zu einer Abbildung $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist unverzweigt. Für $k = 1$ haben wir die Identität die unverzweigt ist.

2. Allgemeiner ist eine holomorphe Abbildung $X \rightarrow Y$ in x verzweigt, genau dann wenn die Funktion den Wert $f(x)$ in x mit Vielfachheit $k \geq 2$ annimmt.

3. Die Abbildungen $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ sind unverzweigt.

Satz 5.19. Für eine nicht-konstante holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sind äquivalent:

1. f ist unverzweigt
2. f ist ein lokaler Homöomorphismus, d.h. für jedes $x \in X$ existiert eine Umgebung $U \subseteq X$ die durch f homöomorph auf eine offene Umgebung $V = f(U)$ von Y abgebildet wird.
3. f ist lokal biholomorph, d.h. in jedem Punkt ist die Ableitung nicht trivial.

Beweis. Für (1) $\Rightarrow$ (2): da f unverzweigt ist gibt es eine offene Umgebung U von x sodass $f|_U$ injektiv ist. Da f ausserdem offen ist folgt, dass $f(U) \subseteq Y$ offen ist und die Abbildung eine Homöo.

Für (2) $\Rightarrow$ (3): falls eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ein lokaler Homöomorphismus ist, so muss in jedem Punkt der Abbildungsgrad gleich 1 sein, also die Ableitung ungleich 0.

Für (3) $\Rightarrow$ (1): die lokale Injektivität folgt sofort. $\square$

Ein Beispiel einer unverzweigten holomorphen Abbildung ist durch die Inklusion einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ gegeben. Allgemeiner kann man abzählbar viele offene Mengen $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i \subseteq X$ nehmen und die Abbildung $\bigsqcup_{i \in I} U_i \rightarrow X$ betrachten. In der klassischen Funktionentheorie Literatur werden diese Abbildungen unverzweigte (aber begrenzte) Überlagerungen genannt.

Satz 5.20. *Sei $X \rightarrow Y$ ein lokaler Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen. Angenommen Y hat die Struktur einer Riemannschen Fläche.*

1. *Dann gibt es eine eindeutige komplexe Struktur auf X , sodass die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ holomorph ist ⁷.*
2. *Für eine Riemannsche Fläche Z ist eine Abbildung $Z \rightarrow X$ genau dann holomorph wenn die Komposition $Z \rightarrow X \rightarrow Y$ holomorph ist.*
3. *Für Z zusammenhängender topologischer Raum (z.B. eine Riemannsche Fläche) stimmen zwei stetige Abbildungen $\phi, \psi : Z \rightarrow Y$ genau dann überein, wenn $f \circ \phi = f \circ \psi$ und es einen Punkt $z_0 \in Z$ gibt mit $\phi(z_0) = \psi(z_0)$.*

Beweis. (1): Wir konstruieren einen Atlas von X . Dazu wählen wir zu jedem $x \in X$ ein U_x sodass $f|_{U_x} : U_x \rightarrow f(U_x)$ ein Homöomorphismus ist. Weiter können wir annehmen, dass $f(U_x) \subseteq Y$ ein Kartengebiet ist, d.h. es gibt eine Karte $f(U_x) \xrightarrow{\varphi_x} V_x \subseteq \mathbb{C}$. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{A} := \{\varphi_x \circ f : U_x \rightarrow V_x\}_{x \in X}.$$

Dies ist ein Atlas, denn: nach Konstruktion sind die Karten Homöomorphismen und die offenen Mengen U_x überdecken X . Es reicht also zu zeigen, dass die Kartenwechsel biholomorph sind. Dazu betrachten wir für $x, y \in X$ einen solchen Kartenwechsel (auf entsprechenden Mengen definiert)

$$(\varphi_x \circ f)(\varphi_y \circ f)^{-1} = \varphi_x \circ \varphi_y^{-1}$$

was nach Voraussetzung biholomorph ist.

Für die Eindeutigkeit sein zwei verschiedene komplexe Strukturen $[\mathcal{A}]$ und $[\mathcal{A}']$ auf X gegeben. Um zu zeigen, dass diese übereinstimmen reicht es zu zeigen, dass die Identität $(X, [\mathcal{A}]) \rightarrow (X, [\mathcal{A}'])$ holomorph ist (durch vertauschen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ folgt die Umkehrung). Dies folgt aber direkt aus Teil (2), den wir jetzt beweisen werden, da die Komposition $(X, [\mathcal{A}]) \rightarrow (X, [\mathcal{A}']) \rightarrow Y$ holomorph ist.

(2): Dies folgt daraus, dass die Abbildung $X \rightarrow Y$ lokal biholomorph ist: sei die Komposition $Z \rightarrow X \rightarrow Y$ holomorph. Um zu sehen, dass $g : Z \rightarrow X$ holomorph müssen wir Karten wählen, sodass $Z \rightarrow X$ in diesen Karten holomorph ist. Dazu wähle Karten $U \subseteq Z$ und $V \subseteq Y$ sodass $f(U) \subseteq V$ und $f : U \rightarrow V$ holomorph (d.h. nach Übersetzen in eine lokal definierte Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$). Wir können U

⁷In diesem Fall ist die Abbildung dann automatisch lokal biholomorph.

und V so klein wählen, dass $f|_{g(U)}: g(U) \rightarrow V$ biholomorph ist. Dann ist $g(U)$ ein Kartengebiet, sodass ..

(3): Eine Richtung ist klar. Also nehme an, dass für einen Punkt $z \in Z$ gelte $\phi(z) = \psi(z)$. Dann betrachte die Menge

$$A = \{z \in Z \mid \phi(z) = \psi(z)\}$$

Diese ist nichtleer und abgeschlossen (weil es das Urbild der Diagonale $\Delta \subseteq X \times X$ unter der stetigen Abbildung $(f, g) : Z \rightarrow X \times X$ ist). Also reicht es zu zeigen, dass A offen ist. Dazu sei ein Punkt $a \in A$ gegeben, d.h. $\phi(a) = \psi(a)$. Wir wählen eine Umgebung V von $\phi(a)$ in X sodass f auf dieser Umgebung injektiv ist. Dann wählen wir eine Umgebung $U \subseteq Z$ mit $\phi(U) \subseteq V$ und $\psi(U) \subseteq V$. Dann stimmen die Kompositionen

$$U \rightarrow V \xrightarrow{f} Y$$

überein, also wegen der Injektivität auch $\phi|_U = \psi|_U$ auf U . Daher $U \subseteq A$ und A ist offen. $\square$

Definition 5.21. Eine Abbildung $X \rightarrow Y$ topologischer Räume heißt Überlagerung falls für jedes $x \in X$ eine Umgebung U existiert, sodass $f^{-1}(U)$ von der Form $\bigsqcup V_i \subseteq X$ ist und die Einschränkung $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. *BILD*

Eine Abbildung zwischen Riemannschen Flächen heißt Überlagerung wenn die unterliegende Abbildung von topologischen Räumen eine Überlagerung ist.

Insbesondere ist jede Überlagerung ein lokaler Homöomorphismus. Die Umkehrung gilt nicht, da die Inklusion $U \subseteq X$ einer echten offenen Teilmenge zwar ein lokaler Homöomorphismus, aber keine Überlagerung ist (warum?).

Beispiel 5.22. • Die Abbildung

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

ist eine Überlagerung. Für einen Punkt in $b \in \mathbb{C}^*$ wähle ein Urbild $a \in \mathbb{C}$. Da $\exp$ lokal biholomorph ist gibt es eine Umgebung U von a und V von B sodass $\exp : U \rightarrow V$ eine biholomorphe Abbildung ist. Dann ist

$$\exp^{-1}(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (U + 2\pi i n)$$

Wenn V klein genug gewählt war, dann sind diese Mengen disjunkt und die Einschränkung von $\exp$ darauf biholomorph. (Falls man die 0 nicht aus dem Bildbereich nimmt so kann dies nicht funktionieren...

• Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \quad z \mapsto z^k$$

für $k \geq 2$. Dies ist eine Überlagerung. Das sieht man wie folgt: für jeden Punkt $b \in \mathbb{C}^*$ kann man ein Urbild a wählen. Weil z^k in jedem Punkt $a \neq 0$ lokal biholomorph ist finden wir eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}^*$ mit $a \in U$ sodass $f|_U : U \rightarrow f(U)$ biholomorph ist. Dann ist

$$f^{-1}(f(U)) = \bigcup_{n=1}^k \exp\left(\frac{2\pi i n}{k}\right) U$$

und wir können wiederum annehmen, dass die offenen Mengen disjunkt sind.

- Die Quotientenabbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ ist eine Überlagerung. Dies sieht man analog wie oben (BILD).

Proposition 5.23. 1. Sei $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung und $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ eine (stetige) Kurve sowie ein Punkt $x \in X$ mit $p(x) = \gamma(0)$. Dann existiert genau eine Kurve $\tilde{\gamma}$ sodass $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ und $\tilde{\gamma}(0) = x$.

2. Gegeben zwei Pfade $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow X$ sodass $\gamma(0) = x_0 = \gamma'(0)$. Weiter seien $p \circ \gamma$ und $p \circ \gamma'$ homotop relativ zu den Endpunkten. Dann sind auch γ und γ' homotop. Genauer gibt es eine eindeutige Homotopie in X die eine gegebene Homotopie in Y liftet.

3. Eine holomorphe Abbildung ist eine Überlagerung genau dann wenn sie unverzweigt ist und die Kurvenliftungseigenschaft (1) besitzt.

Beweis. 1) lokal klar und dann ein Zusammenhangsargument

(2) Wir liften alle Pfade $H_t : [0, 1] \rightarrow Y$ zu Pfaden $\tilde{H}_t : [0, 1] \rightarrow X$ mit Anfangspunkt x_0 (und a priori beliebigem Endpunkt). Dann haben wir die Abbildung $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$. Wir müssen zeigen, dass $\tilde{H}$ stetig ist. Dies kann man lokal testen, wo es klar ist (wie in (1)). Schließlich müssen wir noch zeigen, dass $\tilde{H}_t(1)$ stets gleich $x_1 = \gamma(1)$ ist. Dies ist aber klar, da $\tilde{H}_t(1)$ ein stetige Pfad in der Faser $p^{-1}(p(x_1))$ ist und diese diskret ist.

(3) Übungsaufgabe □

Es folgt aus (2) insbesondere, dass für Pfade mit gleichem Startpunkt sodass die Pfade in der Basis homotop sind auch die Endpunkte übereinstimmen.

Bemerkung 5.24. Mit dem selben Argument wie im Beweis von Satz 5.20 sieht man, dass die Lifts von Pfaden automatische stückweise stetig diffbar sind und die Homotopie es ist, wenn die Pfade (Homotopie) in der Basis diese Eigenschaft erfüllen.

Korollar 5.25. Sei Y wegzusammenhängender topologischer Raum und $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung. Dann sind die Mengen $p^{-1}(y)$ und $p^{-1}(y')$ für je zwei Punkte $y, y' \in Y$ gleichmächtig.

Beweis. Wähle Pfade etc. □

Wir bemerken, dass die im Beweis konstruierte Bijektion von dem Pfad in der Basis abhängt.

Wir erinnern an den Begriff einer einfach-zusammenhängenden Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$: dies bedeutet, dass jeder (stückweise diffbare) Pfad homotop zum konstanten Pfad ist. Dies ist äquivalent dazu, dass jeder stetige Pfad homotop zum konstanten Pfad ist. Analog heisst ein topologischer Raum Z einfach zusammenhängend, falls jeder stetige Pfad in Z homotop zum konstanten Pfad ist. Falls Z eine Riemannsche Fläche ist können wir auch von stückweise stetig differenzierbaren Pfaden sprechen. In diesem Fall ist Z genau dann einfach=zusammenhängend, wenn jeder stückweise stetig differenzierbare Pfad homotop (im diffbaren Sinn) zum konstanten Pfad ist.

Satz 5.26. *Seien X und Y topologische Räume und $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung. Sei Z einfach-zusammenhängend, wegzusammenhängend und lokal-wegzusammenhängend⁸. Für eine Abbildung $f : Z \rightarrow Y$ und Punkte $z_0 \in Z$, $x_0 \in X$ sowie $y_0 \in Y$ mit $f(z_0) = y_0$ und $p(x_0) = y_0$ existiert dann ein eindeutiger Lift $\tilde{f} : Z \rightarrow X$ mit $\tilde{f}(z_0) = x_0$.*

Beweis. Topologie. Idee (wähle Wege und lifte). □

Beispiel 5.27 (Logarithmus einer Funktion). Sei X einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche und $f : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ eine holomorphe Abbildung ohne Nullstelle. Wir wollen einen Logarithmus $\ln(f) : X \rightarrow \mathbb{C}$ finden, sodass $\exp(\ln f) = f$. Dieser existiert nach dem vorigen Resultat, da $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ nach Beispiel 5.22 eine Überlagerung ist (hängt aber natürlich von der Wahl des Logarithmus in einem Punkt ab). Genauso kann man eine Wurzel $\sqrt[n]{f} : X \rightarrow \mathbb{C}$ finden. Als Spezialfall betrachten wir die Inklusion $\mathbb{C}_- \rightarrow \mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}_-$ einfach zusammenhängend ist, finden wir einen Lift (zum Beispiel den Hauptzweig des Logarithmus) und analog für jede andere Halbgerade (oder jedes einfach zusammenhängende Gebiet).

Schließlich wollen wir noch ‘eigentliche’ Abbildungen studieren.

Definition 5.28. *Ein topologischer Raum heisst lokal-kompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt (natürlich sind dies nur Umgebung und nicht offen). Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von lokal-kompakten Räumen heisst eigentlich wenn Urbilder von kompakten Mengen Kompakt sind.*

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind lokal-kompakt. Damit folgt auch, dass jede Riemannsche Fläche lokal-kompakt ist. Eine Abbildung $X \rightarrow Y$ ist zum Beispiel eigentlich, wenn X kompakt ist (das ist im Grunde genommen der einzige Fall der uns interessiert). Die Inklusion einer nicht-leeren echten offenen Menge $U \subseteq X$ ist nicht eigentlich.

Proposition 5.29. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eigentliche, stetige Abbildung zwischen lokal-kompakten topologischen Hausdorff Räumen.*

⁸d.h. jeder Punkt besitzt eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden offenen Mengen.

1. p ist abgeschlossen, d.h. Bilder von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.
2. Falls f lokaler Homöomorphismus ist, so ist $f^{-1}(y)$ endlich und f ist bereits eine Überlagerung.

Beweis. (1) In einem lokalkompakten Raum Y ist eine Menge abgeschlossen, genau dann wenn der Durchschnitt mit jeder kompakten Menge kompakt ist. Sei also $A \subseteq X$ abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass $f(A) \cap K$ kompakt für $K \subseteq Y$ kompakt. Es gilt

$$f(A) \cap K = f(A \cap f^{-1}(K)) .$$

Da $f^{-1}(K)$ kompakt ist, ist auch $A \cap f^{-1}(K)$ kompakt und damit das Bild.

(2) Die Endlichkeit von $f^{-1}(x)$ folgt direkt aus der Eigentlichkeit (da $\{x\} \subseteq Y$ kompakt). Um zu sehen, dass f eine Überlagerung ist wähle zu jedem Punkt $x \in p^{-1}(y)$ Umgebungen U_x die alle homöomorph auf eine Umgebung V von y abgebildet werden (dies geht wegen der Endlichkeit). Wir wollen zeigen, dass (nach potentiell verkleinern von V und U_i) gilt

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in p^{-1}(y)} U_x$$

Es gilt $\supseteq$. Wir können annehmen, dass $V' \subseteq V$ kompakte Umgebung ist. Dann gilt

$$f^{-1}(V') = \left(\bigcup_{x \in p^{-1}(y)} U_x \right) \cap f^{-1}(V') \cup f^{-1}(V') \setminus \left(\bigcup_{x \in p^{-1}(y)} U_x \right) .$$

Die rechte Teilmenge $K' \subseteq f^{-1}(V')$ ist kompakt. Daher ist $f(K')$ ebenfalls kompakt. Es enthält nicht y und daher können wir es von x durch eine kleinere offene Umgebung $V'' \subseteq V$ trennen. Für diese gilt nun, dass $f^{-1}(V'') = \bigcup_{x \in p^{-1}(y)} U_x''$. $\square$

Beispielsweise folgt daraus, dass eine holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit X kompakt genau dann eine Überlagerung ist, wenn sie nicht-konstant und unverzweigt ist. Allgemeiner gilt für eine eigentlich, holomorphe und nicht-konstante Abbildung $f : X \rightarrow Y$, dass die Menge der Verzweigungspunkte $A \subseteq X$ abgeschlossen und diskret ist, da die Abbildung lokal von der Gestalt $z \mapsto z^k$ ist. Damit ist auch $B := f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen und wird die Menge der kritischen Werte genannt.

Dann ist $f : X \setminus f^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$ eine Überlagerung und hat eine wohlbestimmte, endliche Blätterzahl n über jeder Zusammenhangskomponente von Y . Insbesondere wird jeder Wert genau n mal angenommen. Um dies auch auf die kritischen Werte auszudehnen berücksichtigen wir die Vielfachheiten: wir sagen, dass f den Wert $y \in Y$ mit Vielfachheit

$$\sum_{f(x)=y} v(f, x)$$

Satz 5.30. *Für eine eigentliche, nicht-konstante holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit X, Y zusammenhängend wird jeder Wert mit der gleichen, endlichen Vielfachheit angenommen.*

Beweis. Für die Werte in $Y \setminus B$ haben wir dies bereits gesehen. Es bleiben also die kritischen Werte $b \in B$ zu untersuchen. Wir müssen die Summe $\sum_{f(x)=b} v(f, x)$ ausrechnen. Für jede $x \in f^{-1}(b)$ gibt es eine kleine Umgebung U_i die auf $V \subset Y$ eine Umgebung von b abbildet sodass die Abbildung (nach Kartenwechsel) von der Form $z \mapsto z^v(f, x)$ ist. Jeder Punkt in $V \setminus b$ hat dann

$$\sum_{f(x)=b} v(f, x)$$

Urbilder. Da dies Punkte nicht kritisch sind muss diese Summe also gleich n sein. $\square$

Korollar 5.31. *Für X eine kompakte Rf hat jeder meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit Vielfachheit gerechnet genauso viele Nullstellen wie Pole.*

Korollar 5.32. *Ein Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ n -ten Grades nimmt mit Vielfachheit gerechnet jeden Wert (insbesondere 0) genau n mal an.*

Definition 5.33. *Eine Überlagerung $X \rightarrow Y$ mit X, Y zusammenhängend heisst universelle Überlagerung, falls zu jeder anderen Überlagerung $Z \rightarrow Y$ mit Z zusammenhängend und jeder Wahl von Punkten x, y, z die aufeinander abgebildet werden es genau eine Abbildung $X \rightarrow Z$ über Y gibt die x nach z abbildet.*

Offensichtlich ist die Universelle Überlagerung dadurch eindeutig gekennzeichnet, denn ...

Proposition 5.34. *Ein Überlagerung $X \rightarrow Y$ zwischen zusammenhängenden Riemannschen Flächen ist genau dann die universelle Überlagerung, wenn X einfach zusammenhängend ist.*

Umgekehrt existiert für jede zusammenhängende Riemannsche Fläche Y eine solche universelle Überlagerung $X \rightarrow Y$ (die nach xx ebenfalls Riemannsche Fläche ist).

Beweis. Falls $X \rightarrow Y$ eine Überlagerung ist mit X einfach zusammenhängend, so folgt aus Satz 5.26 das sie universell ist. Es reicht also den zweiten Teil zu zeigen. Dies wird in Topologie getan (beachte, dass jeder Riemannsche Fläche semi-lokal einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist). $\square$

Beispiel 5.35. Die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist universelle Überlagerung. Ebenso ist $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ die universelle Überlagerung.

Bemerkung 5.36. Der Uniformisierungssatz (aka großer Riemannscher Abbildungssatz) besagt, dass jede zusammenhängende und einfach-zusammenhängende Riemannsche Fläche biholomorph äquivalent zu einer der folgenden ist:

1. Die oberen Halbebene $\mathbb{H}$ (die holomorph zu $D_1(0) \subseteq \mathbb{C}$ ist)
2. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$
3. Die Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$.

Also ist die Universelle Überlagerung jeder Riemannschen Fläche biholomorph äquivalent zu einer dieser drei.

5.3 Analytische Fortsetzung

Definition 5.37. Let X be a topological space, and let $\mathcal{T}(X)$ be its topology (i.e. the family of open sets of X). A presheaf of sets (resp. abelian groups, rings, k -vector spaces for some field k , etc.) is a pair $(\mathcal{F}, \rho)$ consisting of

1. a family $(\mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{T}(X)}$ of sets (resp. abelian groups, rings, k -vector spaces, etc.);
2. a family $(\rho_V^U)_{U, V \in \mathcal{T}(X), V \subseteq U}$ of functions (resp. group homomorphisms, ring homomorphisms, k -linear maps, etc.)

$$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

such that

$$\begin{aligned} \rho_U^U &= \text{id}_U \\ \rho_W^V \circ \rho_V^U &= \rho_W^U \text{ for } W \subseteq V \subseteq U \end{aligned}$$

called restriction maps.

Bemerkung 5.38. Generally one just writes $\mathcal{F}$ instead of $(\mathcal{F}, \rho)$. It is also customary to denote $\rho_V^U(f)$ just by $f|_V$.

Bemerkung 5.39. An equivalent way to formulate the definition of a presheaf on a topological space X is to say that it is a functor

$$\mathcal{T}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set} \text{ (resp. } \mathbf{Ab}, \mathbf{Ring}, \mathbf{Vect}_k, \text{ etc.)}$$

where the poset $\mathcal{T}(X)$ is considered as a discrete category, i.e. it is the category having the open sets of X as objects, and such that

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}(X)}(V, U) = \begin{cases} \{*\} & \text{if } V \subseteq U \\ \emptyset & \text{else.} \end{cases}$$

Beispiel 5.40. Let G be an abelian group. The assignment

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow G \mid \text{constant}\}$$

with

$$\rho_V^U : (f : U \rightarrow G) \mapsto (f|_V : V \rightarrow G)$$

defines a presheaf of abelian groups on X .

Definition 5.41. A presheaf on a topological space X is called a sheaf if for every open set $U \in X$ and every family of open subsets

$$U_i \subseteq U, \ i \in I \quad \text{such that } U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

the following conditions are satisfied:

1. If $f, g \in \mathcal{F}(U)$ are such that $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ for every $i \in I$, then $f = g$.
2. Given elements $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$ such that

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{for all } i, j \in I,$$

then there exists an $f \in \mathcal{F}(U)$ such that $f|_{U_i} = f_i$ for every $i \in I$.

If $\mathcal{F}$ is a sheaf, we call the elements $f \in \mathcal{F}(U)$ sections of $\mathcal{F}$ at U .

- Bemerkung 5.42.**
1. Notice that the element f obtained by the second axiom is, by the first axiom, uniquely determined.
 2. It follows from the axioms that if $\mathcal{F}$ is a sheaf, then $\mathcal{F}(\emptyset)$ consists of exactly one element.
 3. The definition of a sheaf, can be equivalently formulated as follows:
A sheaf (of, say, sets) on a topological space X is a functor

$$\mathcal{F} : \mathcal{T}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

such that for each open set U and for each open covering U_i , $i \in I$ of U , the diagram

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

(where the first arrow is given by $f \mapsto (f|_{U_i})_{i \in I}$ and the two arrows on the right are given by $(f_i)_{i \in I} \mapsto (f_i|_{U_i \cap U_j})_{i, j \in I}$ and $(f_i)_{i \in I} \mapsto (f_j|_{U_i \cap U_j})_{i, j \in I}$) is an equalizer diagram.

Bemerkung 5.43. For us, “sheaf” without further specifications, will always mean “sheaf of abelian groups”

Beispiel 5.44. 1. $\mathcal{F} = \mathcal{C}$ continuous real (or complex) valued functions.

2. For X Riemann surface, $\mathcal{F} = \mathcal{O}$ holomorphic functions.

3. For X Riemann surface, $\mathcal{F} = \mathcal{M}$ meromorphic functions.

4. For $X = \mathbb{R}^n$ (or more generally X smooth manifold), $\mathcal{F} = \mathcal{C}^k$ real-valued k -differentiable (i.e. continuously differentiable k -many times) functions.

5. For $X = \mathbb{R}^n$ (or more generally X smooth manifold), $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty$ real-valued smooth (i.e. continuously differentiable infinitely many times) functions.
6. For $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\omega$ real-valued analytic functions.

Definition 5.45. Let $\mathcal{F}$ be a presheaf of sets on a topological space X , and let $x \in X$ be a point. We define the stalk of $\mathcal{F}$ at x , denoted $\mathcal{F}_x$ to be the set defined as

$$\mathcal{F}_x = \operatorname{colim}_{U \ni x} \mathcal{F}(U) = \coprod_{U \ni x} \mathcal{F}(U) / \sim$$

where, for $f \in \mathcal{F}(U)$ and $g \in \mathcal{F}(V)$, we have $f \sim g$ if and only if there exists an open set $W \subseteq U \cap V$ such that $x \in W$ and $f|_W = g|_W$.

If $\mathcal{F}$ is a presheaf of abelian groups (rings, etc.) this equivalence relation is compatible with the algebraic structure, hence the stalk will also be an abelian group (ring, etc.). The image f_x of a section $f \in \mathcal{F}(U)$ under the projection $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ is called the germ of f at x .

Bemerkung 5.46. In the case of $X = U \subseteq \mathbb{C}$ connected open subset, and $\mathcal{F} = \mathcal{O}$, a germ of a holomorphic function $f \in \mathcal{O}(V)$ at $w \in V \subseteq U$ is represented by the Taylor expansion of f in a suitably small neighborhood of w , and two holomorphic functions on neighborhoods of w determine the same germ at w precisely if they have the same Taylor expansion in w . Thus, there is an isomorphism between the stalk $\mathcal{O}_w$ and the ring of convergent power series in $z - w$. Similarly, the ring of germs $\mathcal{M}_w$ of meromorphic functions at w is isomorphic to the ring of convergent Laurent series in $z - w$ with finite principal part.

Lemma 5.47. Suppose $\mathcal{F}$ is a sheaf of abelian groups on the topological space X , and $U \subset X$ is an open subset. Then an element $f \in \mathcal{F}(U)$ is zero precisely if all germs $f_x \in \mathcal{F}_x$, $x \in U$ vanish.

Beweis. This is a direct consequence of the first sheaf axiom. □

Let $\mathcal{F}$ be a sheaf on X and let $|\mathcal{F}|$ be the set

$$|\mathcal{F}| = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

and denote by $p: |\mathcal{F}| \rightarrow X$ the projection $\mathcal{F}_x \ni \phi \mapsto x$. We want to define a suitable topology on this space. Let's start considering, for any $U \subseteq X$ open and for any $f \in \mathcal{F}(U)$, the set

$$[U, f] = \{f_x \mid x \in U\} \subseteq |\mathcal{F}|.$$

Proposition 5.48. The family of all sets of the form $[U, f]$ as above is a basis for a topology on $|\mathcal{F}|$. The projection p is a local homeomorphism.

Beweis. Clearly every $\phi \in |\mathcal{F}|$ lies in some set of this form. If $\phi \in [U, f] \cap [V, g]$, let $x = p(\phi) \in U \cap V$. As $f_x = g_x$ there exists a $W \subseteq U \cap V$ containing x and such that $f|_W = g|_W$. Call this restriction h . Then $\phi \in [W, h]$.

Now, let $\phi \in |\mathcal{F}|$, with $x = p(\phi)$. As $\phi \in [U, f]$ for some U and f , we have that $[U, f]$ is an open neighborhood of ϕ , U is an open neighborhood of x and $p|_{[U, f]}$ is bijective, continuous and open, by construction. $\square$

Definition 5.49. We call the topological space $|\mathcal{F}|$ the étalé space of the sheaf $\mathcal{F}$.

Remark. Beware that “étalé” and “étale” are two different words (giving name to two distinct, although related, mathematical concepts). In particular, being étale is a property of a morphism. The word “étalé” is used exclusively to talk about étalé spaces of sheaves. The projection from the étalé space to the base space is an étale map.

Definition 5.50. A presheaf $\mathcal{F}$ on a topological space X is said to satisfy the Identity Theorem if the following holds. If $Y \subset X$ is a connected open subset and $f, g \in \mathcal{F}(Y)$ are elements such that $f_a = g_a$ for some $a \in Y$, then $f = g$.

For example, $\mathcal{O}$ and $\mathcal{M}$ on a Riemann surface X satisfy the Identity Theorem.

Proposition 5.51. Suppose X is a locally connected Hausdorff space and $\mathcal{F}$ is a presheaf on X which satisfies the Identity Theorem. Then the topological space $|\mathcal{F}|$ is Hausdorff.

Beweis. Let ϕ and ψ be distinct points of $|\mathcal{F}|$.

1. If $p(\phi) \neq p(\psi)$ this follows from X being Hausdorff.
2. If $p(\phi) = p(\psi) = x$, choose $f \in \mathcal{F}(U)$ and $g \in \mathcal{F}(V)$ such that $f_x = \phi$ and $g_x = \psi$. Let $W \subseteq U \cap V$ be a connected open neighborhood of x . Then $[W, f|_W]$ and $[W, g|_W]$ are open neighborhoods of ϕ and ψ , respectively. Now, suppose there exists $\alpha \in [W, f|_W] \cap [W, g|_W]$. Let $p(\alpha) = y$. Then $\alpha = f_y = g_y$ hence $f|_W = g|_W$ by the Identity theorem, which in turn implies $\phi = \psi$, which is absurd.

$\square$

Definition 5.52. Suppose X is a Riemann surface, and $u : [0, 1] \rightarrow X$ is a curve from a to b . The germ $\psi \in \mathcal{O}_b$ is said to result from the analytic continuation along the curve u of the germ $\phi \in \mathcal{O}_a$ if the following holds. There exists a family $\phi_t \in \mathcal{O}_{u(t)}$, $t \in [0, 1]$ of germs with $\phi_0 = \phi$ and $\phi_1 = \psi$ with the property that for every $\tau \in [0, 1]$ there exists a neighborhood $T \subseteq [0, 1]$ of τ , an open set $U \subseteq X$ with $u(T) \subseteq U$ and a function $f \in \mathcal{O}(U)$ such that

$$f_{u(t)} = \phi_t \quad \text{for every } t \in T.$$

Because of the compactness of $[0, 1]$ this condition is equivalent to the following. There exist a partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ of the interval $[0, 1]$,

connected open sets $U_i \subseteq X$ with $u([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$ and holomorphic functions $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ for $i = 1, \dots, n$ such that:

1. ϕ is the germ of f_1 at the point a and ψ is the germ of f_n at the point b ;
2. $f_i|_{V_i} = f_{i+1}|_{V_i}$ for $i = 1, \dots, n-1$, where V_i denotes the connected component of $U_i \cap U_{i+1}$ containing the point $u(t_i)$.

Lemma 5.53. *Suppose X is a Riemann surface and $u : I \rightarrow X$ is a curve from a to b . Then a function germ $\psi \in \mathcal{O}_b$ is the analytic continuation of a function germ $\phi \in \mathcal{O}_a$ along u precisely if there exists a lifting $\bar{u} : I \rightarrow |\mathcal{O}|$ of the curve u going from ϕ to ψ .*

Beweis. $[\Rightarrow]$ Take $t \mapsto \phi_t$.

$[\Leftarrow]$ For $t \in I$ let $\phi_t := \bar{u}(t)$. Then $\phi_t \in \mathcal{O}_{u(t)}$. Let $\tau \in [0, 1]$ and suppose $[U, f] \subseteq |\mathcal{O}|$ is an open neighborhood of $\bar{u}(\tau)$. Then there exists a neighborhood $T \subseteq [0, 1]$ of τ such that $\bar{u}(T) \subseteq [U, f]$. This implies $u(T) \subseteq U$ and $\phi_t = \bar{u}(t) = f_{u(t)}$ for every $t \in T$. But this means that ψ is the analytic continuation of ϕ along u .

□

Bemerkung 5.54. It follows from the uniqueness of liftings, that if the analytic continuation of a function germ exists, then it is uniquely determined.

Satz 5.55 (Monodromy Theorem). *Suppose X is a Riemann surface and $u_0, u_1 : I \rightarrow X$ are homotopic curves from a to b . Suppose $u_s(t) = u(t, s)$, is a homotopy between u_0 and u_1 and $\phi \in \mathcal{O}_a$ is a function germ which admits an analytic continuation along every curve u_s . Then the analytic continuations of ϕ along u_0 and u_1 yield the same function germ $\psi \in \mathcal{O}_b$.*

Beweis. This follows from the path homotopy lifting property for local homeomorphisms (we are using that $|\mathcal{O}|$ is Hausdorff). □

Korollar 5.56. *Suppose X is a simply connected Riemann surface, $a \in X$ and $\phi \in \mathcal{O}_a$ admitting an analytic continuation along every curve starting at a . Then there exists a globally defined holomorphic function $f \in \mathcal{O}(X)$ such that $f_a = \phi$. (Uniquely determined, by the Identity Theorem)*

Beweis. For any $x \in X$ let $\psi_x \in \mathcal{O}_x$ be the germ resulting from the analytical continuation of ϕ along any curve from a to x . Since X is simply connected, ψ_x is independent of the choice of the path. Set $f(x) := \psi_x(x)$. Then $f \in \mathcal{O}(X)$ and $f_a = \phi$. □

Bemerkung 5.57. Suppose X and Y are connected Riemann surfaces and $\mathcal{O}_X$ and $\mathcal{O}_Y$ are the sheaves of holomorphic functions on them. Suppose $p : X \rightarrow Y$ is an

unbranched holomorphic function. Since p is locally biholomorphic, for each $x \in X$ it induces an isomorphism $p^* : \mathcal{O}_{Y,p(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. Let

$$p_* : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,p(x)}$$

denote its inverse.

Definition 5.58. Suppose X is a Riemann surface, $a \in X$ is a point and $\phi \in \mathcal{O}_a$ is a function germ. An analytic continuation of ϕ consists of a Riemann surface Y together with:

1. an unbranched holomorphic map $p : Y \rightarrow X$
2. a holomorphic function $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$
3. a point $b \in Y$ such that $p(b) = a$ and

$$p_*(f_b) = \phi.$$

An analytic continuation (Y, p, f, b) of ϕ is said to be maximal if it is terminal among analytic continuations, i.e. given any other analytic continuation (Z, q, g, c) of ϕ , there exists a (necessarily unique) fiber-preserving holomorphic map $F : Z \rightarrow Y$ such that $F(c) = b$ and $f \circ F = g$. (In particular, an analytic continuation is unique up to unique isomorphism.)

Bemerkung 5.59. One often refers just to Y , instead of the quadruple (Y, p, f, b) .

Lemma 5.60. Suppose X is a Riemann surface, $a \in X$, $\phi \in \mathcal{O}_a$ and (Y, p, f, b) is an analytic continuation of ϕ . Then if $v : I \rightarrow Y$ is a curve from b to $y := v(1)$, then the germ $\psi := p_*(f_y) \in \mathcal{O}_{p(y)}$ is an analytic continuation of ϕ along the curve $u := p \circ v$.

Beweis. For $t \in I$ let $\phi_t := p_*(f_{v(t)}) \in \mathcal{O}_{u(t)}$. Then $\phi_0 = \phi$ and $\phi_1 = \psi$. Suppose $t_0 \in I$. Since p is a local homeomorphism, there exist open neighborhoods V of $v(t_0)$ and U of $u(t_0)$ such that $p|_V$ is biholomorphic. Let $q : U \rightarrow V$ be its inverse, and let $g := q^*(f|_V) \in \mathcal{O}(U)$. Then $p_*(f_\eta) = g_{p(\eta)}$ for every $\eta \in V$. There exists a neighborhood T of t_0 in I such that $v(T) \subseteq V$, i.e. $u(T) \subseteq U$. For every $t \in T$

$$g_{u(t)} = p_*(f_{v(t)}) = \phi_t.$$

This proves that ψ is an analytic continuation of ϕ along u . □

Satz 5.61. Suppose X is a Riemann surface, $a \in X$ and $\phi \in \mathcal{O}_a$. Then there exists a maximal analytic continuation (Y, p, f, b) of ϕ .

Beweis. Let Y be the connected component of $|\mathcal{O}|$ containing ϕ . Then $p := p|_Y$ is a local homeomorphism, hence Y has a (unique) complex structure making it a Riemann surface, and making p holomorphic. Define $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ by $\eta \mapsto \eta(p(\eta))$.

Then, by construction, f is holomorphic and $p_*(f_\eta) = \eta$ for every $\eta \in Y$. Thus, for $b := \phi$, we have that (Y, p, f, b) is an analytic continuation of ϕ .

Suppose now that (Z, q, g, c) is another analytic continuation of ϕ . Let $\zeta \in Z$. By the previous lemma, $q_*(g_\zeta) \in \mathcal{O}_{q(\zeta)}$ arises by analytic continuation along a curve from a to $q(\zeta)$. By Lemma 5.53 Y consists of all germs which are obtained by analytic continuation of ϕ along curves. Hence there exists exactly one $\eta \in Y$ such that $q_*(g_\zeta) = \eta$. Let $F(\zeta) = \eta$. Then $F : Z \rightarrow Y$ is a fiber-preserving holomorphic map such that $F(c) = b$ and $F^*(f) = g$. $\square$

6 Differentialformen

6.1 Definition und elementare Eigenschaften

Jetzt wollen wir den Begriff der Differentialformen auf Riemannschen Flächen einführen. Auf einer Riemannschen Fläche X macht es Sinn über reell differenzierbare C^∞ -Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ zu sprechen. Das sind stetig Funktionen die in jeder Karte glatte Funktionen sind. Dann haben wir eine Garbe C^∞ auf von komplexwertigen, reell differenzierbaren Funktionen auf X . Dies ist eine Garbe mit Werten in Ringen und es gibt eine offensichtliche Inklusion von Ringen

$$\mathcal{O}(X) \rightarrow C^\infty(X)$$

die zu einer Abbildung von Garben verfeinert. Für $X = U \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gibt es zwei Standard Projektionen $x, y \in C^\infty(U)$ die durch die Projektionen auf die Koordinatenachsen gegeben sind:

$$(x + iy) \mapsto x \quad \text{bzw.} \quad (x + iy) \mapsto y .$$

In diesem Fall haben wir ausserdem die Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$$

die $\mathbb{C}$ -lineare Derivationen sind (eine Abbildung $\delta : R \rightarrow R$ für einen Ring R heisst Derivation, wenn Sie linear ist und $\delta(rs) = r\delta(s) + \delta(r)s$ gilt). Damit haben wir auch die Derivationen

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) .$$

von $C^\infty(U)$. Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (Satz 1.33) ist $\mathcal{O}(U)$ genau der Kern von $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$.

Für die Garbe C^∞ auf X betrachten wir den Halm C_m^∞ in einem Punkt $m \in X$. Dies ist ein lokaler Ring (d.h. ein Ring mit einem eindeutigen maximalen Ideal) mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_m$ welches aus allen Funktionskeimen $f : U_m \rightarrow \mathbb{C}$ besteht mit $f(m) = 0$.

Definition 6.1. Für m in X definieren wir den Kotangententialraum von X in m als den $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$T_m^*X := \mathfrak{m}_m / \mathfrak{m}_m^2 .$$

Für einen Funktionskeim $f \in C_m^\infty$ (d.h. eine in einer Umgebung von x definierte differenzierbare Funktion) ist

$$d_m f := ((f - f(m)) \bmod \mathfrak{m}_m^2) \in T_m^*X .$$

das Differential von f in m .

Beispiel 6.2. Der Raum $\mathfrak{m}_m^2 \subseteq \mathfrak{m}_m \subseteq C_m^\infty$ besteht aus allen Keimen f die zur zweiten Ordnung verschwinden, d.h. in eine Koordinatenumgebung gilt $f(m) = 0$ sowie $\frac{\partial f}{\partial x}(m) = \frac{\partial f}{\partial y}(m) = 0$. Um dies zu sehen müssen wir zwei Implikationen zeigen: zunächst sein ein Element im Quadrat $f \in \mathfrak{m}_m^2$ gegeben. Dann gilt $f = \sum_{\text{endlich}} f_1 f_2$. Es reicht also zu zeigen, dass $f_1 f_2$ von zweiter Ordnung verschwindet, wenn f_1 und f_2 zur ersten Ordnung verschwinden. Dies folgt aus der Produktregel.

Umgekehrt können wir eine beliebige Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ lokal nach dem Hadamard Lemma (Taylorentwicklung) schreiben als

$$f(x) = f(m) + (x - m)g(x) + (y - m)h(x)$$

für differenzierbare Funktionen g, h auf V mit $g(m) = \frac{\partial f}{\partial x}(m)$ und $h(m) = \frac{\partial f}{\partial y}(m)$. Es folgt, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(m) = \frac{\partial f}{\partial x}(m)$. Wenn f zur zweiten Ordnung verschwindet können wir durch iteration f also schreiben als

$$f(x) = (x - m)^2 f_1(x) + (x - m)(y - m)f_2(x) + (y - m)^2 f_3(x) .$$

Jeder der Terme liegt in $\mathfrak{m}_m^2$ denn er ist evident eine Produkt, zum Beispiel $(x - m)^2 f_1(x) = (x - m) \cdot (x - m)f_1(x)$.

Proposition 6.3. 1. Für $U \subseteq \mathbb{C}$ und $m \in U$ bilden $d_m x$ und $d_m y$ eine Basis von T_m^*X . Eine andere Basis ist gegeben durch $d_m z$ und $d_m \bar{z}$.

2. Für einen Funktionskeim $f \in C_m^\infty$ auf U gilt

$$\begin{aligned} d_m f &= \frac{\partial f}{\partial x}(m) d_m x + \frac{\partial f}{\partial y}(m) d_m y \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(m) d_m z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(m) d_m \bar{z} \end{aligned}$$

3. Die Zerlegung

$$\mathbb{C} \cdot d_m z \oplus \mathbb{C} \cdot d_m \bar{z} = T_m^*M$$

is unabhängig von der Wahl der Karte auf U .

Beweis. (1) Wir betrachten den Fall $U = \mathbb{C}$ und $m = 0$. Dann ist $\mathfrak{m}_0$ die Menge aller Funktionskeime $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$. Wir zeigen zunächst, dass dx und dy den Kotangentialraum erzeugen. Dazu sei $[\phi] \in \mathfrak{m}_0$. Durch Taylorentwicklung schreiben wir

$$\varphi = c_1x + c_2y + \psi$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und $\psi \in \mathfrak{m}_0^2$, denn ψ hat Taylorentwicklung in der alle Terme durch x^2 , xy oder y^2 teilbar sind. Es folgt

$$[\varphi] = c_1[x] + c_2[y] = c_1d_0x + c_2d_0y .$$

Ausserdem sind d_0x und d_0y linear unabhängig, denn aus $\lambda_1d_0x + \lambda_2d_0y$ folgt

$$\lambda_1x + \lambda_2y \in \mathfrak{m}_m^2 .$$

Dies impliziert aber nach dem vorangegangenen Beispiel, dass die partiellen Ableitungen λ_1 und λ_2 verschwinden.

(2) Wir schreiben eine differenzierbare Funktion f in einer Umgebung von m wieder als

$$f = f(m) + \frac{\partial f}{\partial x}(m)(x - m) + \frac{\partial f}{\partial y}(m)(y - m) + g$$

wobei g zur zweiten Ordnung verschwindet (wie vorher mit Termen $(x - m)^2$, $(x - m)(y - m)$ und $(y - m)^2$ startet). Die Behauptung folgt durch Übergang zu Restklassen.

(3) Für zwei Karten $z, z' : U \rightarrow \mathbb{C}$ um m gilt

$$\frac{\partial z'}{\partial z}(m) =: c \in \mathbb{C}^\times$$

sowie

$$\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}(m) =: \bar{c} \in \mathbb{C}^\times$$

und

$$\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}(m) = \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z}(m) = 0 .$$

Daher gilt

$$d_m z' = c d_m z \quad \text{and} \quad d_m \bar{z}' = \bar{c} d_m \bar{z} .$$

□

Es folgt, dass für jede Riemannsche Fläche X und jeden Punkt m ist der Vektorraum $T_m^* M$ zweidimensional ist eine kanonische Zerlegung in eindimensionale Unterräume hat die wir mit

$$T_m^{1,0} M \subseteq T_m^* M \quad T_m^{0,1} M \subseteq T_m^* M$$

bezeichnen (lokal ist $T_m^{1,0} M$ von $d_m z$ und $T_m^{0,1} M$ von $d_m \bar{z}$ aufgespannt). Die Elemente werden Kotangentialvektoren vom Typ $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ genannt.

Definition 6.4. Eine Differentialform 1. Ordnung oder kurz 1-Form ω auf X ist eine Zuordnung die jedem Punkt $m \in X$ einen Kotangentenvektor $w(m) \in T_m^*M$ zuordnet. Eine Differentialform heisst vom Typ $(1,0)$ falls für alle M gilt $\omega(m) \in T^{0,1}_m$ und analog vom Typ $(0,1)$.

Wir bemerken, dass wir für eine Differentialform erstmal keine Stetigkeit oder Differenzierbarkeit fordern, im Gegensatz zu den meisten Definitionen. Für eine Funktion $f \in C^\infty(X)$ haben wir die Differentialform df definiert als $m \mapsto d_m f$. In einer Kartenumgebung (U, z) lässt sich jede 1-Form ω schreiben als

$$\omega = f dx + g dy \quad (= h dz + l d\bar{z})$$

mit Abbildungen $f, g, h, l : U \rightarrow \mathbb{C}$ die im Allgemeinen nicht stetig sein müssen.

Definition 6.5. Für eine Riemannsche Fläche X sagen wir, dass eine Differenzialform ω stetig (glatt) ist falls sie sich in jeder Kartenumgebung (U, z) schreiben lässt als

$$\omega|_U = f dz + g d\bar{z}$$

mit $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig (bzw. glatt). Sie heisst holomorph wenn $g = 0$ und f holomorph ist. Wir bezeichnen die Menge der glatten Differenzialformen mit

$$\Omega^1(X) = \Omega^{1,0}(X) \oplus \Omega^{0,1}(X)$$

und die Menge der holomorphen Differentialformen mit $\Omega^1_{\mathcal{O}}(X)$ (wenn wir sichergehen wollen schreiben wir $\Omega^1_{C^\infty}(X)$ für glatte 1-Formen).

Die Ableitung definiert also eine Abbildung

$$d : C^\infty(X) \rightarrow \Omega^1(X) .$$

(Warum ist die Differenzierbar?).

Bemerkung 6.6. Wir wollen das Transformationsverhalten von Differentialformen etwas studieren: Angenommen wir haben $X = U \subseteq \mathbb{C}$ mit der Standardkarte z und $a = 0$. Sei eine weitere Karte $z' : U \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben (also fassen wir z' also Abbildung in z auf). Wir schreiben Differentialform $\omega|_U$ als

$$f dz = f' dz'$$

Dann ist nach Proposition 6.3

$$dz' = \frac{\partial z'}{\partial z} dz$$

Also ist die Abbildung $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben als

$$f'(z) = f(z) \cdot \left(\frac{\partial z'(z)}{\partial z} \right)^{-1}$$

Wir wollen allerdings die Funktion f' in der Koordinate z' ausdrücken, also mit dem Inversen von z' komponieren. Dazu sei $\varphi : V \rightarrow U$ dieses Inverse mit $V \subseteq U$. Dann ist

$$f'(\varphi(w)) = f(\varphi(w)) \cdot \frac{\partial \varphi(w)}{\partial w} .$$

Dies würde man auch als $f'(z')$ schreiben.

Sei $a \in X$ ein Punkt in einer Riemannschen Fläche und $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^1(X \setminus a)$ eine auf $X \setminus a$ definierte, holomorphe Differentialform. Für jede Wahl einer Kartenumgebung (U, z) von a können wir dann ω schreiben als $\omega = f \cdot dz$ mit $f \in \mathcal{O}(X \setminus a)$. Wir drücken f in der Karte (ist klar was gemeint ist ?) aus durch seine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^i .$$

Definition 6.7. *In der obigen Situation sagen wir, dass ω einen Pol k -ter Ordnung (eine hebbare Singularität) hat wenn f einen Pol k -ter Ordnung hat. Wir definieren unabhängig davon ob es sich um einen Pol oder eine wesentliche Singularität handelt)*

$$\text{Res}_a \omega := \text{Res}_z f = a_{-1} .$$

Lemma 6.8. *Diese Definition ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Karte. Insbesondere ist das Residuum eine Invariante von Differentialformen.*

Beweis. Dies kann man durch explizites Rechnen unter Benutzung des Transformationsverhaltens von Differentialformen sehen, wir wollen aber einen etwas konzeptionelleren Beweis führen. Dazu behaupten wir zunächst, dass für eine holomorphe Abbildung $g \in \mathcal{O}(X \setminus a)$ gilt $\text{Res}_a dg = 0$, unabhängig von der Karte. Dies folgt daraus, dass für jede Karte (U, z) gilt, dass $g(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^i$ und damit $dg = g'(z)dz$ und $g'(z)$ keinen Koeffizienten -1 hat. Für eine beliebige Differentialform

$$\omega = f(z)dz$$

schreiben wir

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^i = \frac{\partial \left(\sum_{i \neq -1}^{\infty} a_i z^{i+1} / (i+1) \right)}{\partial z} + a_{-1} z^{-1}$$

Also

$$\omega = dg + a_{-1} z^{-1} dz$$

Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus der Tatsache, dass das Residuum von der Differentialform $a_{-1} z^{-1} dz$ unabhängig von der Karte durch a_{-1} gegeben ist. Dies folgt aber aus dem Transformationsverhalten, da sich die Funktion $a_{-1} z^{-1}$ unter Kartenwechsel zu

$$a_{-1} \varphi(w)^{-1} \varphi'(w)$$

transformiert, die offensichtlich ebenfalls den Koeffizienten a_{-1} vor w^{-1} hat, da $\varphi^{-1}(w) = 1b_1z^{-1} + \text{weitere Terme mit } b_1 = \varphi'(w)$ und $\varphi'(w)$ holomorph. $\square$

Bemerkung 6.9. Wir werden später sehen, dass man Differentialformen (und nicht Funktionen) entlang von Wegen integrieren kann. Damit kann man das Residuum dann auch definieren als Integral um den Pol herum (mit positiver Orientierung).

Exkurs: Äußeres Produkt von Vektorräumen Sei V ein Vektorraum über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ (alles funktioniert genauso über $\mathbb{R}$). Wir wollen einen neuen Vektorraum $\Lambda^2 V$, genannt das (zweite) äußere Produkt von V definieren. Wir werden dies mittels seiner universellen Eigenschaft tun.

Definition 6.10. Seien V und W Vektorräume. Eine bilineare Abbildung $\beta : V \times V \rightarrow W$ heißt alternierend falls gilt $\beta(v, w) = -\beta(w, v)$ für je zwei Elemente $v, w \in V$. Wir schreiben $\text{Alt}(V, W)$ für die Menge der alternierenden Bilinearformen $V \times V \rightarrow W$.

Ein Vektorraum $\Lambda^2 V$ zusammen mit einer alternierenden bilinearen Abbildung $\wedge : V \times V \rightarrow \Lambda^2 V$ heißt äußeres Produkt, falls er folgende universelle Eigenschaft erfüllt: für jeden weiteren Vektorraum W ist die induzierte Abbildung

$$\text{Lin}(\Lambda^2 V, W) \rightarrow \text{Alt}^2(V, W) \quad f \mapsto f \circ \wedge$$

eine Bijektion. Mit anderen Worten: $t : V \times V \rightarrow \Lambda^2 V$ ist die initiale alternierende Bilinearform.

Wie üblich legt die universelle Eigenschaft den Vektorraum $\Lambda^2 V$ bis auf eindeutige Isomorphie fest, es kann also höchstens einen (im kategoriellen Sinne) Vektorraum mit diesen Eigenschaften geben. Wir müssen also noch die Existenz beweisen.

Proposition 6.11. 1. Für jeden Vektorraum V existiert $\Lambda^2 V$.

2. Wir schreiben die Bilder unter der kanonischen Abbildung $\wedge : V \times V \rightarrow \Lambda^2 V$ auch als $v \wedge w$ für $v, w \in V$. Dann ist jedes Element von $\Lambda^2 V$ von der Form

$$\sum_{i=1}^n v_i \wedge w_i$$

für Elemente $v_i, w_i \in V$ (diese sind aber nicht eindeutig dadurch festgelegt).

3. Für eine geordnete Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V ist $\{v_i \wedge v_j\}_{i < j}$ eine Basis von $\Lambda^2 V$.

Insbesondere folgt, dass für einen n -dimensionalen Vektorraum V der Vektorraum $\Lambda^2 V$ die Dimension $\binom{n}{2}$ hat. Wir wollen dies nun auf den Kotangententialraum anwenden. Dieser ist komplex 2-dimensional. Also ist $\Lambda^2(T_m^* M)$ komplex 1-dimensional. Eine Basis ist gegeben durch $d_m x \wedge d_m y$ oder durch $d_m z \wedge d_m \bar{z}$.

Definition 6.12. Eine Differentialform 2. Ordnung oder kurz 2-Form ω auf X ist eine Zuordnung die jedem Punkt $m \in X$ ein element $\omega(m) \in \Lambda^2(T_m^*M)$ zuordnet. Sie heisst diffbar wenn sie sich in einer Karte (U, z) um jeden Punkt (und damit in jeder Karte) schreiben lässt als $f dz \wedge d\bar{z}$ mit $f \in C^\infty(U)$. Wir bezeichnen die Menge der glatten 2-Formen auf X mit $\Omega^2(X)$.

Man kann nun per Definition das Wedge Produkt von 1-formen bilden $\omega \wedge \omega' \in \Omega^2(X)$. Dieses ist definiert als $(\omega \wedge \omega')(m) = \omega(m) \wedge \omega'(m)$. Falls ω und ω' glatt sind, so ist auch $\omega \wedge \omega'$ glatt, denn in einer Koordinatenumgebung gilt

$$(f dz + g d\bar{z}) \wedge (f' dz + g' d\bar{z}) = (fg' - gf') dz \wedge d\bar{z}.$$

Wir haben also eine alternierende, bilineare Abbildung.

$$\wedge : \Omega^1(X) \times \Omega^1(X) \rightarrow \Omega^2(X). \quad (3)$$

Bemerkung 6.13. Wenn man die Konstruktion $\Lambda_R^2(M)$ für Moduln über Ringen R definieren, dann kann man zeigen, dass das Wedge Produkt (3) einen isomorphismus $\Omega^2(X) = \Lambda_{C^\infty(X, \mathbb{C})}^2(\Omega^1(X))$ induziert.

Seien X und Y Riemannsche Flächen und $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung. Wir haben eine induzierte Abbildung $T_{f(m)}^*Y \rightarrow T_m^*X$ für jeden Punkt $x \in X$ induziert von der Abbildung von Halmen $\mathbb{C}_{f(m)}^\infty \rightarrow C_m^\infty$.

Definition 6.14. Given a smooth differential form $\omega \in \Omega^i(Y)$, for $i = 1$ (resp. 2), we define the pullback $f^*\omega \in \Omega^i(X)$ for $i = 1$ (resp. 2) as follows:

1. **1-forms:** locally $\omega = \sum g_j dh_j$, with g_j and h_j smooth, (e.g. $\omega = f_1 dz + f_2 d\bar{z}$ for z local coordinate system), set

$$f^*\omega = f^*\left(\sum g_j dh_j\right) := \sum (f^*g_j) d(f^*h_j).$$

2. **2-forms:** locally $\omega = \sum g_j (dh_j \wedge dk_j)$, (all smooth), set

$$f^*\omega := \sum f^*g_j d(f^*h_j) \wedge (f^*k_j).$$

It is easy to check that these definitions are independent of the local representations chosen, and hence glue together to give a unique global morphism

$$f^* : \Omega^i(Y) \rightarrow \Omega^i(X).$$

Definition 6.15. Let $\omega \in \Omega^1(X)$, and let $\omega = \sum f_k dg_k$ be a local expression for ω with f_k and g_k smooth, and set

$$d\omega = \sum df_k \wedge dg_k \in \Omega^2(X).$$

Again, it is easy to check that this definition is independent of the local representatives chose [did the check during the lecture], hence we get a morphism

$$d : \Omega^1(Y) \rightarrow \Omega^2(X)$$

called exterior derivative.

Proposition 6.16. Suppose X is a Riemann surface, $f \in C^\infty(X)$, $\omega \in \Omega^1(X)$. Then

1. $ddf = 0$.
2. $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$.

Beweis. 1. $d d f = d 1 \wedge df = 0$.

$$\begin{aligned} 2. \quad d f \omega &= d(\sum f g_j dh_j) = \sum (g_j df + f dg_j) \wedge dh_j \\ &= \sum df \wedge g_j dh_j + \sum f dg_j \wedge dh_j = df \wedge \omega + f d\omega. \end{aligned}$$

□

Definition 6.17. Suppose X is a Riemann surface, then $\omega \in \Omega^1(X)$ is called closed if $d\omega = 0$ and exact if there exists an f smooth on X such that $\omega = df$.

Bemerkung 6.18. As $ddf = 0$, exact implies closed, but the converse does not hold in general.

Satz 6.19. Let X be a Riemann surface.

1. Every holomorphic 1-form is closed.
2. Every closed 1-form $\omega \in \Omega^{1,0}$ is holomorphic.

Beweis. $\omega \in \Omega^{1,0}$ is locally of the form $f dz$, hence $d\omega = \left(df \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$. □

6.2 Integration of differential forms

Note that throughout we will apply our usual conventions about curves.

Definition 6.20. Let X be a Riemann surface, and let $\omega \in \Omega^1 X$, suppose furthermore that $\gamma : I \rightarrow X$ is a piecewise differentiable curve, i.e. that there exist charts $(U_k, z_k = x_k + iy_k)$ and a partition of I , $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ such that $\gamma([t_{k-1}, t_k]) = U_k$ and such that

$$x_k \circ \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \text{ and } y_k \circ \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$$

have continuous first order derivatives. The integral of ω along γ is defined as (writing $\omega|_{U_k} = f_k dx_k + g_k dy_k$)

$$\int_\gamma \omega := \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(\gamma(t)) \frac{dx_k(\gamma(t))}{dt} + g_k(\gamma(t)) \frac{dy_k(\gamma(t))}{dt} \right) dt$$

Satz 6.21. X Riemann surface, $\gamma : I \rightarrow X$ piecewise differentiable, F smooth over X , then

$$\int_\gamma dF = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

7 Proof of Residuum theorem

Satz 7.1. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^1(X \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ für Punkte $a_1, \dots, a_n$. Dann ist die Summe über alle Residuen*

$$\sum_{i=1}^n \text{Res}_{a_i} \omega$$

gleich 0.

Beweis. Wähle disjunkte Karten (U_i, z_i) um die Punkte a_i . Wir können annehmen, dass $z_i(a_i) = 0$ und $z_i(U_i) = D_1(0) \subseteq \mathbb{C}$. Wir wählen glatte cut-off Funktionen $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ die außerhalb von U_i gleich 0 sind und in einer Umgebung $U'_i \subseteq U_i$ von a_i gleich 1 sind. Wir setzen

$$g := 1 - f_1 - \dots - f_n$$

und setzen die glatte Differentialform $g\omega \in \Omega^1(X)$ durch 0 in die Punkte a_i fort. Die Differentialform hat kompakten Träger, also ist nach dem letzten Satz

$$\int_X d(g\omega) = 0 .$$

Da ω holomorph ist gilt in $X' := X \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, dass $d\omega = 0$. Es folgt, dass $f_i\omega$ auf U'_i ebenfalls verschwindende Ableitung hat. Also haben wir eine glatte 2-form

$$d(f_i\omega) \in \Omega^2(X)$$

deren Träger eine kompakte Teilmenge von $U_i \setminus a_i$ ist. Wegen $d(g\omega) = -\sum d(f_i\omega)$ gilt

$$\sum_{i=1}^n \int_X d(f_i\omega) = 0 .$$

Wir wollten zeigen, dass $\int_X d(f_i\omega) = -2\pi i \text{Res}_{a_i} \omega$, was damit direkt den Satz impliziert. Da der Träger in U_i enthalten ist können wir über U_i integrieren und dann mit der Karte in die komplexe Ebene übersetzen. Dort müssen wir dann $\int_{D_1(0)} f_i(z) d\omega$ ausrechnen. Wir wählen $0 < \epsilon < R < 1$ sodass f_k auf D_ϵ gleich 1 ist und außerhalb von D_R gleich 0. Also folgt

$$\int_{D_1(0)} d(f_i\omega) = \int_{D_{\epsilon,R}} d(f_i\omega) = \int_{\gamma_R} 0 \cdot \omega - \int_{\gamma_\epsilon} 1 \cdot \omega = -2\pi i \text{Res}_{a_i} \omega$$

Nach dem üblichen Residuensatz (bzw der Integralformel). □

8 Der Satz von Riemann Roch

In diesem Kapitel wollen wir den Satz von Riemann Roch und einige wichtige Folgerungen daraus diskutieren. Wir beschränken uns hier auf zusammenhängende Riemannsche Flächen (also wieder die implizite Annahme).

Zunächst wollen wir das Geschlecht von Riemannschen Flächen einführen. Anschaulich ist das Geschlecht die Anzahl der ‘Löcher’ in einer Riemannschen Fläche:

Bild

(es ist klar, dass jede Riemannsche Fläche als reell differenzierbare Mannigfaltigkeit orientiert ist). Wir wollen das Geschlecht aber rein Funktionentheoretisch einführen. Dazu erinnern wir an den Begriff einer holomorphen und meromorphen Differentialform die Bezeichnungen $\Omega_{\mathcal{O}}^1$ und $\Omega_{\mathcal{M}}^1$ für den Raum dieser. Dies ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Definition 8.1 (/Satz). *Für eine kompakte Riemannsche Fläche ist die komplexe Dimension des Raumes der meromorphen Differentialformen endlich. Wir bezeichnen diese als das Geschlecht von X , i.e.*

$$g := \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{\mathcal{O}}^1(X) .$$

Beweis. Beweis der Endlichkeit ausgelassen. □

Beispiel 8.2. Wir behaupten, dass das Geschlecht von $\mathbb{P}^1$ gleich 0 ist, also, dass es keine holomorphen Differentialformen auf $\mathbb{P}^1$ geben kann. Dies folgt daraus, dass $\mathbb{P}^1$ einfach zusammenhängend ist, und daher wie in der letzten Vorlesung bewiesen jede holomorphe Funktion eine holomorphe Stammfunktion besitzt, also von der Form df ist. Da aber alle holomorphen Funktionen konstant sind, ist auch f konstant, daher $df = 0$.

Definition 8.3. *Ein Divisor auf einer Riemannschen Fläche ist eine Abbildung $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ mit diskretem Träger, d.h. die Menge der Punkte $x \in X$ mit $D(x) \neq 0$ ist diskret in X (insbesondere endlich, wenn X kompakt ist).*

Man sollte sich Divisoren als endliche viele Punkte auf der Riemannschen Fläche vorstellen, die durch ganze Zahlen gelabelt sind. Die Menge der Divisoren bildet eine abelsche Gruppe bezüglich der punktweisen Addition die wir mit $\text{Div}(X)$ bezeichnen. Wir haben auch eine partielle Ordnung definiert durch $D \leq D'$ falls $D(x) \leq D'(x)$ für jedes $x \in X$.

Beispiel 8.4. Für jede meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)^*$ haben wir einen Divisor (f) , definiert durch die Zuordnung $x \mapsto \omega(f, x)$ (die Ordnung von f in x , diese war definiert für holomorphe Abbildungen). Wegen des Identitätssatzes ist dies ein Divisor. Eine Funktion f ist genau dann holomorph, wenn $(f) \geq 0$.

Beispiel 8.5. Betrachte meromorphe Differentialform $\omega \in \Omega_{\mathcal{M}}^1 \setminus 0$, d.h. eine Differentialform die lokal von der Form $f dz$ mit f meromorph und nicht 0 ist. Wir können wir ebenso die Ordnung und damit einen Divisor $(\omega) \in \text{Div}(X)$ definieren. Wiederum ist ω holomorph, wenn $(\omega) \geq 0$.

Für $f \in \mathcal{M}(X)^*$ und $\omega \in \Omega_{\mathcal{M}}^1 \setminus 0$ gelten die Beziehungen

$$(fg) = (f) + (g) \quad (f\omega) = (f) + (\omega) \quad \left(\frac{1}{f}\right) = -(f) .$$

Ein Divisor heisst Hauptdivisor, falls er von der Form (f) für $f \in \mathcal{M}(X)^*$ ist. Zwei Divisoren heissen äquivalent, wenn ihre Differenz ein Hauptdivisor ist. Wir haben eine abelsche Gruppe $\text{Div}(X)/\sim$. Der Divisor (ω) einer meromorphen Differentialform ω heisst *kanonischer Divisor*. Je zwei kanonische Divisoren sind äquivalent, denn zu $\omega, \omega' \in \Omega^1(X) \setminus 0$ existiert eine Funktion $f \in \mathcal{M}(X)^*$ mit $\omega = f\omega'$ (warum?), also

$$(\omega) - (\omega') = (f) .$$

Definition 8.6. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann definieren wir für einen Divisor D den Grad

$$\deg D := \sum_{x \in X} D(x) \in \mathbb{Z} .$$

Diese Summe ist endlich.

Die Abbildung $\deg$ definiert einen Gruppenhomomorphismus

$$\text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

welche über die Relation ‘äquivalenz’ faktorisiert, da eine Holomorphe Funktion genausoviele Nullstellen wie Polstellen besitzt.

Definition 8.7. Sei D ein Divisor und X eine Riemannsche Fläche. Wir definieren Garben $\mathcal{O}_D$ und Ω_D^1 durch

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U) \mid (f) \geq -D\}$$

(wobei wir hier die Nullfunktion zulassen, da diese stets größer als jeder Divisor sind) und

$$\Omega_D^1(U) = \{\omega \in \Omega_{\mathcal{M}}^1 \mid (\omega) \geq -D\}$$

mit den offensichtliche Einschränkungsabbildungen.

Man sollte sich die Menge $\mathcal{O}_D(X)$ also Funktionen vorstellen, die nicht zu ‘schlimm’ meromorph sind (also nah an holomorph) für gegebenes D . Es ist ein entscheidendes Ziel diese Menge zu beschreiben (bzw. die Dimension des Vektorraumes, also wieviele linear unabhängige Funktionen es gibt).

Lemma 8.8. *Dies sind tatsächlich Garben. Für äquivalente Divisoren D und D' gibt es Isomorphismen $\mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_{D'}$ sowie $\Omega_D^1 \cong \Omega_{D'}^1$. Für einen gegebenen kanonischen Divisor K finden wir eine Äquivalenz $\Omega_D^1 \cong \mathcal{O}_{D+K}$.⁹*

Beweis. Die Garbeneigenschaft ist klar!? Der Isomorphismus kommt von Multiplikation mit f falls $D' = D - (f)$:

$$\mathcal{O}_D(U) \rightarrow \mathcal{O}_{D'}(U) \quad g \mapsto fg .$$

mit Inversem gegeben durch multiplikation mit f^{-1} . Analog geht der Isomorphismus für Ω_D^1 . Sei $K = (\omega)$. Der Isomorphismus oben ist von der Form

$$\mathcal{O}_{D+K}(U) \xrightarrow{\cong} \Omega_D^1(U) \quad f \mapsto f\omega$$

□

Lemma 8.9. *Seien ein Divisor D auf X gegeben mit $\deg D < 0$. Dann ist*

$$\mathcal{O}_D = 0 .$$

Beweis. Für jedes $f \in \mathcal{O}_D$ ist $\deg(f) \geq \deg(-D) > 0$ im Widerspruch zu $\deg(f) = 0$. □

Für Divisoren $D \leq D'$ hat man $-D \geq -D'$ und daher erhält man Inklusionen

$$\mathcal{O}_D(U) \subseteq \mathcal{O}_{D'}(U) \quad \Omega_D^1(U) \subseteq \Omega_{D'}^1(U) .$$

Lemma 8.10 (Key Lemma). *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $D \leq D'$. Dann gibt es eine exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D(X) \rightarrow \mathcal{O}_{D'}(X) \rightarrow (\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_{D'})(X) \rightarrow (\Omega_{-D}^1(X))^* \rightarrow (\Omega_{-D'}^1(X))^* \rightarrow 0 .$$

Hier ist $(\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_{D'})$ der Quotient von Garben (den wir nicht definieren wollen)

$$\dim_{\mathbb{C}} ((\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_{D'})(X)) = \deg D' - \deg D .$$

Beweis. Leider können wir aus Zeitgründen auf das Lemma nicht genau eingehen. Wir verweisen auf Kapitel 2 in Forster wo dies mittels Garbenkohomologie und Serre Dualität gemacht wird. □

Satz 8.11 (Satz von Riemann Roch). *Sei X eine kompakte, zusammenhängende Riemannsche Fläche von Geschlecht g . Für jeden Divisor D auf X gilt dann*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D(X) - \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{-D}^1(X) = 1 - g + \deg D$$

und beide auftretenden Dimensionen sind endlich.

⁹Wir haben nicht bewiesen (es ist aber richtig), dass stets eine meromorphe Differentialform, also ein kanonischer Divisor existiert

Beweis. Die Aussage ist richtig für $D = 0$, denn.

Seien zwei Divisoren mit $D \leq D'$ gegeben sodass für einen der beiden die Aussage gelte. Wir betrachten die Sequenz aus dem Key Lemma 8.10. Die die Sequenz exakt ist folgt, dass alle Dimensionen endlich Dimensional sind und die alternierende Summe der Dimensionen verschwindet (Lemma über lange exakte Sequenzen), also

$$\begin{aligned} 0 &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D(X) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{D'}(X) + (\deg D' - \deg D) - \dim_{\mathbb{C}} \Omega_D^1(X) + \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{D'}^1(X) \\ &= (\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D(X) - \dim_{\mathbb{C}} \Omega_D^1(X) - \deg D) - (\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{D'}(X) - \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{D'}^1(X) - \deg D') . \end{aligned}$$

Es folgt, dass wenn der Satz für einen der beiden gilt der Term in der Klammer gleich $(1 - g)$ ist und damit der Satz auch für den anderen gilt.

Schließlich sei D ein beliebiger Divisor. Wir finden einen Divisor $D' \geq 0$ mit $D \leq D'$. Daher gilt der Satz zunächst für D' und damit auch für D . $\square$

Auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht g ist die Maximalzahl linear unabhängiger meromorpher Funktionen, die Vielfache eines Divisors $-D$ sind, minus der Maximalzahl linear unabhängiger meromorpher Differentialformen, die Vielfache von D sind, gleich $1 - g + \deg D$.

Wir können den zweiten Term auch umschreiben zu $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{K-D})$ für einen kanonischen Divisor K und damit vollständig in Termen von Funktionen ausdrücken. Üblicherweise schreibt man $\ell(D) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D$. Für einen kanonischen Divisor K auf X haben wir dann $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{-D}^1) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{K-D}) = \ell(K - D)$. Es ist dann

$$\ell(D) - \ell(K - D) = 1 - g + \deg D .$$

Bisher hatten wir allerdings nicht gesehen, dass es überhaupt kanonische Divisoren gibt. Dies folgt nun einfach:

Korollar 8.12. *Auf jeder Riemannschen Fläche X existiert eine nicht-triviale meromorphe Differentialform, also gibt es auch einen kanonischen Divisor $K \in \text{Div}(X)$ der wohldefiniert in $\text{Div}(X)/\sim$ ist.*

Beweis. Wählen einen Divisor D der in einem Punkt D konzentriert ist und dort einen Wert $-n$ annimmt wobei $n > 0$ so gewählt ist, dass $n > 1 - g$ ist. Es ist $\mathcal{O}_D = 0$ da keine holomorphe Funktion in einem Punkt eine Nullstelle der Ordnung n haben kann (Lemma 8.9). Es folgt

$$-\dim \Omega_{-D}^1 = 1 - g - n$$

also

$$\dim \Omega_{-D}^1 = n - (1 - g) > 0 .$$

$\square$

Es gilt sogar, dass auf allen RF von Geschlecht ≥ 1 holomorphe Differentialformen existieren, da wir dort $n = 0$ wählen können. In vielen Fällen schätzt man die Dimension von $\Omega_D^1(X)$ durch 0 ab und bekommt damit eine untere Schranke für die Dimension von $\mathcal{O}_D(X)$, nämlich

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D(X) \geq 1 - g + \deg D$$

was für einen geeigneten Divisor D stets positiv ist.

Satz 8.13. *Für den Divisor einer nichtverschwindenden meromorphen Differentialform ω auf einer kompakten Riemann'schen Fläche vom Geschlecht g gilt*

$$\deg(\omega) = 2g - 2 .$$

Beweis. Sei $K = (\omega)$. Es gilt

$$\ell(K) - \ell(0) = 1 - g + \deg K$$

Es gilt $\ell(0) = 1$ und $\ell(K) = \dim \mathcal{O}_K = \dim \Omega_{\mathcal{O}}^1 = g$. Also

$$g - 1 = 1 - g + \deg K .$$

□

Korollar 8.14. *Für ein Gitter Γ hat $\mathbb{C}/\Gamma$ das Geschlecht eins.*

Beweis. Die Differentialform dz existiert auf $\mathbb{C}/\Gamma$ und hat keine Null und Polstellen. Also $2g - 2 = \deg(dz) = 0$. □

Wir erinnern daran, dass auf kompakten Riemannschen Flächen alle holomorphen Funktionen konstant sind. Wir versuchen nun meromorphe Funktionen zu finden, die möglichst wenige Pole haben. Das folgende Kriterium zeigt was man erreichen kann.

Korollar 8.15. *Sei X eine zusammenhängende, kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht g und $x \in X$ ein Punkt. Dann gibt es eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ die in x einen Pol der Ordnung $\leq g + 1$ hat und sonst holomorph ist.*

Beweis. Sei $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ der Divisor mit $D(x) = g + 1$ und $D(y) = 0$ for $y \neq x$. Dann gilt

$$\ell(D) \geq 1 - g + (g + 1) = 2 .$$

Es muss also eine nicht-konstante Funktion in $\mathcal{O}_D(X)$ geben die die Bedingungen des Satzes erfüllt. □

Korollar 8.16. *Zu jeder Riemannschen Fläche X gibt es eine holomorphe, nicht konstante Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ mit höchstens $g + 1$ -Blättern.*

Beweis. Die Abbildung des letzten Satzes stellt eine solche dar. □

Wir erinnern daran, dass die Abbildung f eigentlich ist und daher mit Vielfachheit jeden Wert gleich oft annimmt (sie hat endlich viele Verzweigungspunkte und ist sonst eine Überlagerung). Für $g = 0$ folgt sofort, dass die Abbildung biholomorph ist (da Sie einblättrig ist).

Korollar 8.17. *Jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0 ist biholomorph zur Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$.*