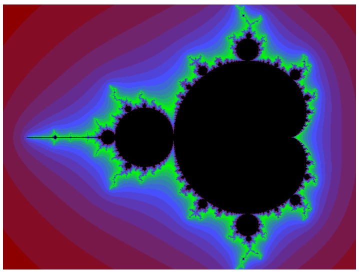
Proseminar

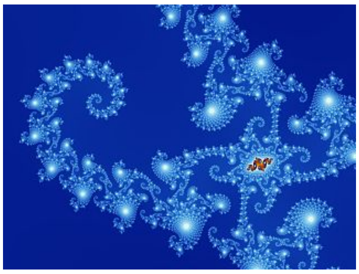
FRAKTALE GEOMETRIE

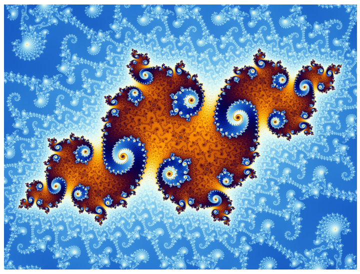
Dr. Thomas Nikolaus

SS 2013

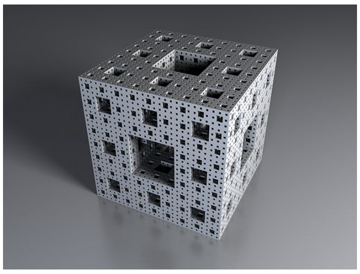
Was ist ein Fraktal? Anschaulich ist ein Fraktal eine Menge die bei genauerem Hinsehen beliebig feine regelmäßige Strukturen besitzt oder sogar lokal ähnlich zu sich selbst ist. Das wohl bekannteste Beispiel ist die Mandelbrotmenge, die hier in drei verschiedenen Zoomstufen dargestellt ist:



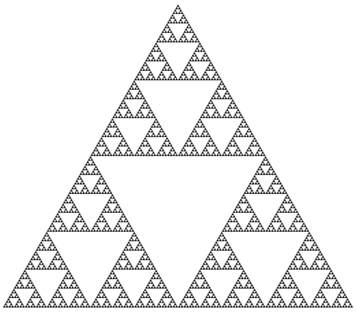




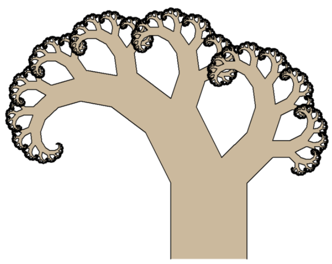
Beispiele für die lokale Ähnlichkeit zu sich selbst sind der Menger-Schwamm, das Sierpinski-Dreieck, der Pythagoras-Baum (siehe Bild) oder die bekannte Cantor-Menge. Aber es gibt viele weitere interessante und faszinierende Fraktale die in den verschiedensten Bereichen der Natur oder der Mathematik auftreten. Formal hat Benoît Mandelbrot im Jahre 1975 [M] ein Fraktal definiert als einen metrischen Raum, dessen Hausdorff-Dimension größer als die topologische Dimension ist. Insbesondere können Fraktale eine reelle, nicht-ganzzahlige Dimension haben. So hat der unten dargestellte Menger-Schwamm beispielsweise eine Dimension von ca. $2,727$ und das Sierpinski Dreieck ca. $1,585$.



Menger-Schwamm



Sierpinksi Dreieck



Pythagoras-Baum

Ziel dieses Seminars ist es uns die Grundlagen anzueignen um den Begriff des Fraktales zu verstehen. Zentral für das Verständnis der verschiedenen Dimensionen sind metrische und maßtheoretische Grundbegriffe die auch in anderen Gebieten der Mathematik essentiell sind. Wir werden keine Vorkenntnisse in diesen Bereichen voraussetzen und anhand des Buches [E] vorgehen. Wir wollen außerdem viele Beispiele von Fraktalen kennenlernen und untersuchen. Das Proseminar richtet sich an Studierende der Studiengänge Bachelor Mathematik und Lehramt Gymnasium und ist anrechnbar in dem Modul **BSem**.

Anmeldung: in der Vorbesprechung am Dienstag, den 5.2.2013 um 18:00 Uhr in Raum M006. Fragen oder Anmerkungen gerne per E-Mail an Thomas1.Nikolaus@mathematik.uni-regensburg.de.

Vortragsthemen

Die Vorträge sollen auf 70 Minuten konzipiert werden, damit Zeit für Diskussionen, Fragen und Ergänzungen bleibt. Jeder Vortragende soll sich eine kurze Anwesenheitsaufgabe zu seinem Thema überlegen. Geben Sie mir bitte 10 Tage vor dem Termin Ihres Vortrags eine grobe (handschriftliche) Ausarbeitung ab.

Wir gehen nach dem Buch [E] vor. Dabei werden wir das erste Kapitel, in dem Beispiele zu finden sind auslassen. Daher möchte ich alle Teilnehmer bitten sich dieses Kapitel vor Beginn des Seminars anzuschauen. Falls in einem Vortrag eines der Beispiele betrachtet werden soll, kann der Vortragende dies in der Woche davor den Anderen mitteilen, sodass diese sich das entsprechende Beispiel nochmal anschauen können.

Vortrag 1: Wiederholung von metrischen Grundbegriffen wie Isometrien, Ähnlichkeitsabbildungen, Stetigkeit, Folgenstetigkeit, Vollständigkeit, Rand, Seperabilität, Bolzano-Weierstraß, Heine-Borel und Kompaktheit [E, Kapitel 2.1-2.3].

Vortrag 2: Gleichmäßige Konvergenz, Stetige Kurven, Peano-Kurven, die Hausdorff-Metrik und Konvergenz von Mengen, eine Auswahl von Beispielen (eventuell Stringmetriken) [E, Kapitel 2.4-2.6].

Vortrag 3: 0-dimensionale Räume, Eigenschaften (Trennung, Basis, Summe), Überdeckungsdimension, Eigenschaften (Trennung, Summen, Teilmengen), Beispiele [E, Kapitel 3.1-3.2].

Vortrag 4: Induktive Dimension (kleine und große), Eigenschaften (Summe, Trennung), Vergleich der Dimensionen [E, Kapitel 3.4-3.5].

Vortrag 5: Listen von Verhältnissen, Ähnlichkeitsdimension, Attraktoren. Graphen-Selbstähnlichkeit (eventuell nur skizzieren, je nach Zeit). Viele Beispiele wo möglich [E, Kapitel 4.1 (4.3)].

Vortrag 6: Maßtheorie: Lebesgue Maße, Konstruktionsmethode I und II (hier etwas knapper im Stile eines Übersichtsvortrages vorgehen, da die Konstruktionen in der Analysis genauer gemacht werden) [E, Kapitel 5.1-5.4].

Vortrag 7: Hausdorff Maß und Dimension definieren, Packungsmaß und -dimension definieren, Eigenschaften [E, Kapitel 6.1 - 6.2].

Vortrag 8: Verschiedenen Definitionen von Fraktalen. Viele Beispiele diskutieren, Vergleich Lebesgue und Hausdorff Maße, Vergleich fraktale und topologische Dimension. [E, Kapitel 6.3].

Vortrag 9: Für ausgewählte Beispiele Dimensionen berechnen/abschätzen, Vergleich mit Selbstähnlichkeitsdimension: offene Mengen Bedingung, Beispiele (auch Konstruktion wiederholen) [E, Kapitel 6.4, 6.5].

Vortrag 10: Graphen-Selbstähnlichkeit, Offene Graphen Bedingung. Viele Beispiele diskutieren (und dabei auch nochmal wiederholen). [E, 6.6-6.7].

Vortrag 11: Andere Dimensionsbegriffe und zusätzliche Themen [E, 6.8, 6.9] und die dort zitierte Sekundärliteratur.

Vortrag 12: Abschließende Übersicht und/oder ein optionaler Vortrag über ein Thema aus Kapitel 7 [E, Kapitel 7].

Abschließend möchte ich darauf hinweisen, dass bei einigen der Vorträge die angegebenen Buchkapitel recht umfangreich sind. Hierbei ist es wichtig sich auf das Wesentliche zu beschränken und eventuell manche Beweise/Exkurse/unwichtige Stellen zu kürzen oder wegzulassen. Falls es Unklarheiten gibt was ausgelassen werden darf, bitte ich Sie diesbezüglich kurz Rücksprache zu halten.

Literatur

[E] G. Edgar. Measure, topology, and fractal geometry, Springer 2008.

[F] K. Falconer. Fractal geometry - Foundations and applications, John Wiley & Sons Ltd. 1990.

[M] B.B. Mandelbrot. Les objets fractals: forme, hasard et dimension, Flammarion Paris 1975.

[Q] B.v. Querenburg. Mengentheoretische Topologie, Springer 2001.