

# Differentialgleichungen

Skript zur Vorlesung

Prof. Dr. T. de Laat

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Wintersemester 2018/19

Vorläufige Version: 10. Januar 2019

Diese Version des Skripts ist vollständig. Es wird allerdings  
gegebenenfalls noch Korrekturen geben.

## Vorbemerkungen

Diese Veranstaltung wird speziell für Studierende in den 2-Fach-Bachelorstudiengängen, dem Bachelor BK und dem Master of Education Gym/Ges bzw. BK angeboten. Insbesondere werden nur Grundkenntnisse aus den Vorlesungen Analysis I + II und Lineare Algebra I vorausgesetzt.

Dieses Skript ist eine überarbeitete Version des Skripts zur gleichnamigen Vorlesung von PD. Dr. T. Timmermann im Wintersemester 2016/17. Ich bedanke mich bei Thomas Timmermann für das zur Verfügung stellen seines Skripts.

Es wird nicht garantiert, dass alle in der Vorlesung behandelten Resultate und Beispiele in diesem Skript enthalten sind.

Es wird empfohlen neben diesem Skript auch andere Literatur zu benutzen. Zum Thema *gewöhnliche Differentialgleichungen* gibt es viele Lehrbücher. Einige sind in den Semesterapparat zur Vorlesung aufgenommen, zum Beispiel [Aul04], [Heu09] und [Wal00]. Sonst sind auch [Arn01] und [BDP95] sehr empfehlenswert.

Für Hinweise auf Fehler in diesem Skript bin ich dankbar. Schreiben Sie mir dazu bitte eine E-Mail ([tim.delaat@uni-muenster.de](mailto:tim.delaat@uni-muenster.de)).

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Skalare DGL erster Ordnung</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Explizite skalare DGL erster Ordnung</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Lineare DGL erster Ordnung</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Existenz und Eindeutigkeit nach Picard-Lindelöf</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Exakte Differentialgleichungen</b>	<b>32</b>
<b>II</b>	<b>Systeme von DGL erster Ordnung</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>Systeme von DGL erster Ordnung – Vorbemerkungen</b>	<b>37</b>
<b>7</b>	<b>Autonome Systeme von Differentialgleichungen</b>	<b>39</b>
<b>8</b>	<b>Lineare Systeme von DGL mit konstanten Koeffizienten</b>	<b>47</b>
<b>9</b>	<b>Lineare Systeme von DGL erster Ordnung</b>	<b>60</b>
<b>III</b>	<b>Differentialgleichungen höherer Ordnung</b>	<b>64</b>
<b>10</b>	<b>Reduktion auf Systeme erster Ordnung</b>	<b>64</b>
<b>11</b>	<b>Lineare DGL n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten</b>	<b>66</b>



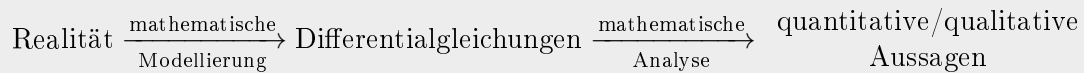
# 1 Einleitung

Differentialgleichungen spielen eine wichtige Rolle bei der mathematischen Modellierung von Vorgängen, die von einem Parameter abhängen. Historisch gesehen wurden einige wichtige Begriffe der Analysis und der linearen Algebra entwickelt anhand von Fragen über Differentialgleichungen.

Wir beschreiben jetzt die in der Vorlesung untersuchten (gewöhnlichen) Differentialgleichungen und umreißen die uns interessierenden Fragestellungen.

## Differentialgleichungen als mathematische Modelle realer Probleme

Die mathematische Modellierung von Problemen aus den Naturwissenschaften, aber auch der Ökonomie, führt oft auf Differentialgleichungen. Aus deren mathematischer Analyse erhofft man sich Aussagen über die ursprünglichen Probleme:



Wir konzentrieren uns in der Vorlesung nicht nur auf die mathematische Analyse, sondern wollen auch viele Anwendungsbeispiele behandeln.

Die mathematische Analyse wird schon für einfache Modelle oft sehr schwierig. Beispielsweise ist die Analyse der sogenannten Navier-Stokes-Gleichungen, welche Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen beschreiben, eines der 7 Millenniums-Probleme der Mathematik (wie die gelöste Poincaré-Vermutung und die offene Riemannsche Vermutung), für deren Lösung jeweils eine Million Dollar Preisgeld ausgeschrieben ist. Auch kann die Kombination unzureichender mathematischer Modellierung und Analyse zum Beispiel in der Finanzwirtschaft verheerende reale Folgen haben.

## Eingrenzung der betrachteten Differentialgleichungen

Differentialgleichungen treten in vielen verschiedenen Varianten auf. Wir betrachten hauptsächlich *gewöhnliche Differentialgleichungen*. Diese beschreiben eine Beziehung zwischen

- einer *unabhängigen Größe*, oft der Zeit, etwa mit  $t$  bezeichnet,
- einer oder mehrerer *davon abhängigen Größen*  $y_1, \dots, y_k$ , die also Funktionen in  $t$  sind und die differenzierbar von  $t$  abhängen,
- den Ableitungen  $y'_1, \dots, y'_k$  dieser abhängigen Größen nach  $t$ ,
- möglicherweise auch noch höheren Ableitungen  $y''_1, \dots, y''_k$  usw. nach  $t$

in Form einer Gleichung

$$f(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

wobei man praktischerweise die abhängigen Größen  $y_1, \dots, y_k$  zu einem Vektor zusammenfasst, also

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_k'(t) \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

und die Funktion  $f$  sozusagen das mathematische Modell darstellt.

Eine *Lösung* dieser Gleichung auf einem Intervall  $[a, b]$  ist dann gegeben durch  $n$ -mal differenzierbare Funktionen  $y_1, \dots, y_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ , welche (1) für alle  $t \in [a, b]$  erfüllen, wobei für  $t = a$  und  $t = b$  jeweils die rechts- bzw. linksseitigen Ableitungen einzusetzen sind. Lösungen auf offenen Intervallen  $(a, b)$  oder halboffenen Intervallen  $[a, b)$  oder  $(a, b]$  sind analog definiert.

Die *Ordnung* der DGL (1) ist die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung von  $y$ , also  $n$ . In Anwendungen ist meist  $n = 1$  oder  $n = 2$ ; aus theoretischer Sicht kann man sich auf den Fall  $n = 1$  einschränken (siehe später).

Man nennt eine DGL  $n$ -ter Ordnung *explizit*, wenn sie nach  $y^{(n)}$  aufgelöst ist, also wenn sie die Form  $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  hat. Sonst nennt man sie *implizit*.

**Beispiel 1.1.** Die Gleichung

$$y' + 2ty = 0 \quad (2)$$

ist eine explizite DGL erster Ordnung. Man rechnet leicht nach, dass  $y(t) = e^{-t^2}$  eine Lösung auf  $\mathbb{R}$  definiert. Später werden wir sehen, dass jede Lösung von (2) durch  $y(t) = Ce^{-t^2}$  gegeben ist, wobei  $C$  eine reelle Zahl ist.

## Fragestellungen der mathematischen Analyse

Typische Fragen lauten:

- *Existieren* Lösungen, die zum Beispiel
  - (a) gewisse *Anfangsbedingungen* für  $y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n)}(t_0)$
  - (b) oder *Randbedingungen* für  $y(a), y'(a), \dots, y^{(n)}(a)$  und  $y(b), y'(b), \dots, y^{(n)}(b)$
 erfüllen? Bei der Modellierung realer Probleme ist die Existenz von Lösungen im Fall (a) oft empirisch klar.
- Sind diese Lösungen *eindeutig*?
- Kann man Lösungen *explizit* angeben? Wie für die Berechnung von Integralen gibt es dazu einige Heuristiken/Methoden und Formelsammlungen. Diese Fragestellung stand historisch lange im Vordergrund.

- Wie verhalten sich die Lösungen *qualitativ*, zum Beispiel für  $t \rightarrow \infty$ ? Wie *stabil* sind die Lösungen unter kleinen Änderungen der Anfangswerte? Diese Fragestellungen führen zur Theorie der *dynamischen Systeme*.
- Wie lassen sich Lösungen *näherungsweise (numerisch) berechnen*? Dies ist für die Anwendungen eine der wichtigsten Fragen und führt zur Disziplin der *Numerik*.

### Abgrenzung zu anderen Varianten von DGL

- *Partielle DGLn* treten auf, wenn die gesuchten Größen  $y_1, \dots, y_k$  von *mehreren* unabhängigen Größen abhängen, zum Beispiel neben der Zeit  $t$  auch vom Ort  $x = (x_1, \dots, x_3)$ . Partielle DGLn sind für Anwendungen sehr wichtig, aber auch sehr kompliziert.
- *Stochastische DGLn* treten z.B. in der Ökonomie auf, wenn die gesuchten Größen  $y_1(t), \dots, y_k(t)$  *Zufallsgrößen* sind. Auch diese sind sehr kompliziert.
- *Differenzgleichungen* treten auf, wenn die unabhängige Größe  $t$  nur gewisse Werte  $t_0, t_1, \dots$  annehmen kann, also wenn z.B. statt einer kontinuierlichen eine schrittweise Zeitentwicklung betrachtet wird; dann tritt an Stelle von (1) eine Gleichung der folgenden Form auf:

$$0 = f\left(t_i, y(t_i), \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \dots\right).$$

### Beispiele von Modellen zur Entwicklung von Populationen

**Beispiel 1.2** (*Kaninchen-Vermehrung nach Fibonacci*). Fibonacci betrachtete für die Vermehrung einer Population von Kaninchen folgendes bekannte und stark vereinfachte Modell:

- Im Jahr 1 der Betrachtung besteht die Population aus einem (gerade neu geborenen) Kaninchenpaar.
- Jedes Kaninchenpaar, *das älter als ein Jahr ist*, bringt jeden Sommer *genau ein neues* Kaninchenpaar zur Welt.
- Alle Kaninchen sind unsterblich.

Dann gibt es also in den Jahren

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \dots$$

gerade

$$0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad \dots$$

Kaninchenpaare. Bezeichnet  $f_n$  die Anzahl der Paare im Jahr  $n$ , so gilt also

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+1} - f_n = f_{n-1} \text{ bzw. } f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Diese *Fibonacci-Zahlen* wurden intensiv studiert. Eine explizite Formel für die  $f_n$  kann man zum Beispiel mit Hilfe der linearen Algebra herleiten. Die Vektoren

$$F_n := \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

erfüllen

$$F_{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = AF_n \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$F_{n+1} = AF_n = A^2F_{n-1} = \dots = A^nF_1.$$

Die Matrix  $A$  hat zwei verschiedene Eigenwerte:  $\lambda_1, \lambda_2$ . Wählt man zugehörige Eigenvektoren  $v_1, v_2$ , so bilden diese eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ , also gibt es  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  mit  $F_1 = c_1v_1 + c_2v_2$  und

$$F_{n+1} = A^nF_1 = A^n(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1\lambda_1^n v_1 + c_2\lambda_2^n v_2.$$

**Beispiel 1.3** (*Vermehrung von Bakterien*). Bakterien vermehren sich nicht nur im Sommer, sondern ständig. Ein einfaches Modell zur Vermehrung einer Population von Bakterien sieht so aus:

Bezeichne

- $y(t)$  die Größe der Population zum Zeitpunkt  $t$ ,
- $y(t + \Delta t)$  die Größe nach einem kurzen Zeitraum  $\Delta t$ .

Dann beträgt der Zuwachs während "hinreichend kleiner" Zeiträume  $\Delta t > 0$  etwa

$$y(t + \Delta t) - y(t) \sim \underbrace{(\alpha - \beta)}_{=: \lambda} \cdot y(t) \cdot \Delta t \quad (3)$$

mit einer gewissen *Geburtenrate*  $\alpha$ , *Sterberate*  $\beta$  und resultierender *Änderungsrate*  $\lambda = \alpha - \beta$ , die jeweils von der Bakterienart und den als konstant angenommenen äußeren Einflüssen abhängen. Es wird oben angenommen, dass  $\alpha$  und  $\beta$  (und deshalb  $\lambda$ ) proportional zu  $\Delta t$  sind. Dabei gilt (3) umso genauer, je kleiner  $\Delta t$  wird, beziehungsweise

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lambda y(t). \quad (4)$$

Hier kann man Lösungen raten. Es ist klar, dass für jedes  $C \in \mathbb{R}$ , die Funktion definiert durch  $y_C(t) = Ce^{\lambda t}$  eine Lösung von (4) ist.

Sei  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Lösung von (4), und definiere  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $z(t) = y(t)e^{-\lambda t}$ . Dann gilt

$$z'(t) = (y(t)e^{-\lambda t})' = y'(t)e^{-\lambda t} - \lambda y(t)e^{-\lambda t} = 0$$



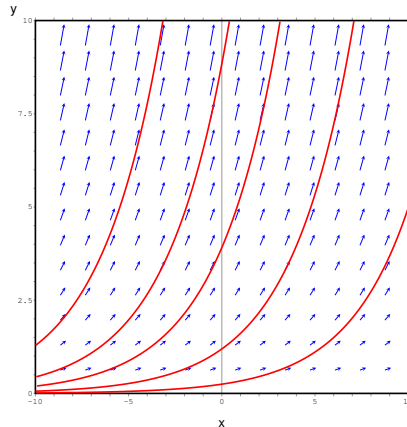


Abbildung 1: Exponentielles Wachstum

für jedes  $t \in \mathbb{R}$ , also  $z$  ist konstant. Es folgt, dass  $y = y_C$  für ein  $C \in \mathbb{R}$ .

Es folgt, dass bei einer gegebenen Anfangspopulation  $y(0) = y_0$  die Gleichung (4) die eindeutige Lösung

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

hat.

Im obigen Beispiel (mit Anfangsbedingung) konnten wir explizit eine Lösung angeben, und wir konnten mit elementaren Methoden zeigen, dass diese Lösung eindeutig ist. Später werden wir abstrakte Kriterien betrachten, aus welchen die Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen von solchen Anfangswertproblemen folgen.

## Teil I

## Skalare DGL erster Ordnung

## 2 Explizite skalare DGL erster Ordnung

## Problemstellung

Wir betrachten nun folgende DGLn:

**Definition 2.1.** Eine explizite skalare Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$y' = f(t, y) \quad (5)$$

mit einer gegebenen Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ . Fordert man zusätzlich

$$y(t_0) = y_0 \quad (6)$$

mit gegebenen  $(t_0, y_0) \in U$ , so spricht man von einem (expliziten skalaren) Anfangswertproblem (kurz AWP) erster Ordnung.

Eine Lösung dieses AWP ist eine Funktion  $y: [t_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$  (mit möglichst großem  $b$ ), die (5) und (6) erfüllt. Dazu muss insbesondere

- $y$  auf  $(t_0, b)$  differenzierbar sein,
- $y'(t_0)$  als rechtsseitige Ableitung  $\lim_{h \searrow 0} \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h}$  existieren,
- $(t, y(t)) \in U$  für alle  $t \in [t_0, b)$  gelten.

**Bemerkung 2.2.** Wir werden meist DGL der Form (5) betrachten, bei denen die Funktion  $f$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  definiert und stetig ist. Insbesondere ist dann für jede Lösung  $y$  von (5) auch  $y'$  stetig.

## Veranschaulichung durch das Richtungsfeld

Eine Lösungskurve der DGL (5) muss in jedem Punkt  $(t, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ , den sie durchläuft, in Richtung des Vektors  $(1, f(t, y))$  verlaufen. Zur Veranschaulichung kann man das zu  $f$  gehörige Richtungsfeld skizzieren, in das man an Gitterpunkten  $(t, y)$  eines ausreichend dicht gewählten Gitters jeweils den Vektor  $(1, f(t, y))$  (eventuell skaliert mit einem einheitlichen Faktor) einzeichnet, wie etwa in der Abbildung 1.

## Eulersche Polygonzüge

Ein naheliegendes Verfahren zur Berechnung einer Näherungslösung  $\tilde{y}$  eines AWP's erster Ordnung sieht wie folgt aus:

Wähle Gitterpunkte  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$  und setze  $\tilde{y}$  auf  $[t_i, t_{i+1}]$  für  $i = 0, 1, 2, \dots$  geradlinig mit  $\tilde{y}(t_0) := y_0$  und

$$\tilde{y}(t_{i+1}) := \tilde{y}(t_i) + f(t_i, \tilde{y}(t_i)) \cdot (t_{i+1} - t_i) \text{ für } i = 0, 1, \dots$$

Die Näherungslösung  $\tilde{y}$  hat also nicht in jedem Punkt  $t$  den Anstieg  $f(t, \tilde{y}(t))$ , sondern behält auf den Intervallen  $[t_i, t_{i+1}]$  jeweils den "eingefrorenen" Anstieg  $f(t_i, \tilde{y}(t_i))$  bei.

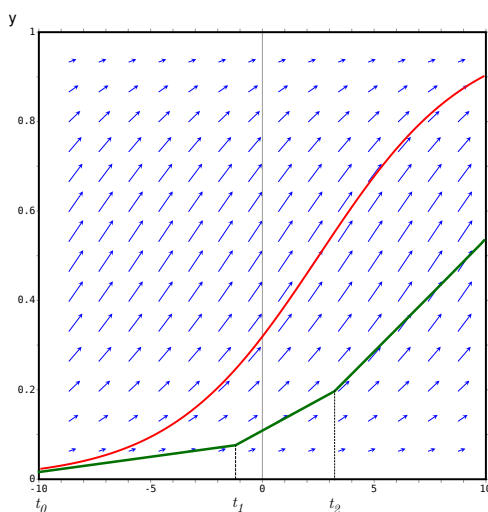


Abbildung 2: Näherungslösung (grün) nach Eulerschem Polygonzugverfahren

Man hofft, dass sich die Näherungslösung  $\tilde{y}$  der richtigen Lösung des AWP's beliebig genau annähert, wenn die Intervallabstände  $|t_{i+1} - t_i|$  hinreichend klein gewählt werden. Es kann gezeigt werden, dass dies unter geeigneten Bedingungen an die Funktion  $f$  tatsächlich passiert.

In einfachen Fällen kann man das obige Verfahren direkt analysieren:

**Beispiel 2.3.** Wir betrachten die DGL  $y' = \lambda y$  mit  $\lambda > 0$  und untersuchen für ein  $b > t_0$  den Wert der Näherungslösung  $\tilde{y}(b)$  für den Fall eines gleichmäßigen Gitters  $t_0, \dots, t_n = b$  mit Schrittweite  $\delta = \frac{b-t_0}{n}$ . Hier wird

$$\tilde{y}(t_1) = y_0 + \lambda y_0 \delta = (1 + \lambda \delta) y_0, \quad \tilde{y}(t_2) = (1 + \lambda \delta) \tilde{y}(t_1) = (1 + \lambda \delta)^2 y_0, \quad \dots,$$

und schließlich

$$\tilde{y}(b) = \tilde{y}(t_n) = (1 + \lambda \delta)^n y_0 = \left(1 + \lambda \frac{b-t_0}{n}\right)^n y_0.$$

Aus Analysis I ist bekannt, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Wenn wir die Anzahl der Gitterpunkte gegen unendlich gehen lassen, folgt:

$$\tilde{y}(b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\lambda(b-t_0)} y_0$$

Das ist genau der Wert der exakten Lösung, die durch  $y(t) = e^{\lambda(t-t_0)} y_0$  gegeben ist.

### Ein Spezialfall

Falls  $f(t, y)$  in (5) nicht von  $y$  abhängt, also eine Funktion  $g$  mit  $f(t, y) = g(t)$  für alle  $(t, y) \in U$  existiert, so sind die Lösungen von (5) gerade die Stammfunktionen von  $g$ . Solche existieren natürlich nur unter bestimmten Annahmen an  $g$ .

**Satz 2.4.** *Seien  $t_0, b, y_0 \in \mathbb{R}$  und  $g: [t_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann hat das AWP*

$$y' = g, \quad y(t_0) = y_0$$

auf  $[t_0, b)$  eine eindeutige Lösung  $y$ , gegeben durch

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t g(s) ds \quad \text{für alle } t \in [t_0, b). \quad (7)$$

*Beweis.* Das folgt direkt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.  $\square$

Historisch bezeichnet man deswegen das Lösen einer DGL auch als das "Integrieren der DGL".

### Lösung durch Trennung der Variablen

Betrachten wir folgendes Beispiel:

**Beispiel 2.5 (Schneeball-Schmelze).** Wir betrachten einen kugelförmigen Schneeball, der gleichmäßig schmilzt, wobei das in einer kurzen Zeit abschmelzende Volumen etwa proportional zur Oberfläche sei. Wir drücken die Oberfläche mit Hilfe des Volumens aus und suchen eine Differentialgleichung für die Entwicklung des Volumens  $V$  als Funktion der Zeit  $t$ . Das Volumen  $V$  und die Oberfläche  $A$  einer Kugel mit Radius  $r$  sind gegeben durch

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad A = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3} = c \cdot V^{2/3}$$

mit geeignetem  $c$ . Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$V' = -\lambda V^{2/3}, \quad (8)$$

wobei  $\lambda$  durch  $c$  und die Schmelzrate bestimmt wird. Wir stellen diese Gleichung um und sehen mit der Kettenregel, dass

$$-\lambda = V'V^{-2/3} = 3 \frac{d}{dt} \left( V^{1/3} \right).$$

Dies ist eine DGL für  $V^{1/3}$ , die wir wie in Satz 2.4 lösen können. Für  $t \geq t_0$  gilt:

$$V(t)^{1/3} = V(t_0)^{1/3} - \frac{\lambda}{3}(t - t_0)$$

beziehungsweise

$$V(t) = \left( -\frac{\lambda}{3}(t - t_0) + V(t_0)^{1/3} \right)^3.$$

Schreiben wir die DGL (8) in der Form  $V' = f(t, V)$ , so hängt die Funktion  $f$  nicht vom ersten Argument  $t$ , sondern nur vom zweiten Argument ab. Dies ist ein Gegenstück zum in Satz 2.4 betrachteten Spezialfall und ähnlich lösbar. Wir betrachten nun den etwas allgemeineren Fall eines *Anfangswertproblems mit getrennten Variablen*:

$$y' = \frac{g(t)}{h(y)}, \quad y(t_0) = y_0, \quad (9)$$

wobei  $g$  und  $h$  stetige Funktionen sind mit  $h(y) \neq 0$  in einer Umgebung von  $y_0$ . Schreiben wir  $y' = \frac{dy}{dt}$ , so liefert rein symbolische Manipulation:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)} \Leftrightarrow \int h(y)dy = \int g(t)dt.$$

**Satz 2.6.** *Es seien  $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$  und  $g$  und  $h$  auf offenen Intervallen um  $t_0$  bzw.  $y_0$  definierte stetige Funktionen mit  $h(y_0) \neq 0$ . Setze*

$$G(t) := \int_{t_0}^t g(s)ds, \quad H(y) := \int_{y_0}^y h(x)dx.$$

(i) *Erfüllt  $y$  das AWP (9), so folgt*

$$H(y(t)) = G(t) \quad (10)$$

*für alle  $t$  nahe bei  $t_0$ .*

(ii) *Die Funktion  $H$  ist auf einer Umgebung von  $y_0$  invertierbar und  $y := H^{-1} \circ G$  löst auf einer Umgebung von  $t_0$  das AWP (9). Die Funktion  $y$  ergibt sich also aus (10) durch Auflösung nach  $y$ .*

*Beweis.* (i): Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$\frac{d}{dt} (H(y(t)) - G(t)) = h(y(t))y'(t) - g(t) = 0.$$

Die Differenz  $H(y(t)) - G(t)$  ist also konstant und hat für  $t = t_0$  den Wert  $H(y_0) - G(t_0) = 0 - 0 = 0$ . Folglich ist  $H(y(t)) = G(t)$  für alle  $t$  nahe bei  $t_0$ .

(ii): Aus  $H'(y) = h(y)$  und  $h(y_0) \neq 0$  folgt mit der Stetigkeit von  $h$ , dass  $H'(y) \neq 0$  auf einer Umgebung von  $y_0$ . Auf dieser Umgebung ist  $H$  also streng monoton (siehe unten), nach Analysis I invertierbar, das Inverse  $H^{-1}$  differenzierbar und

$$(H^{-1})'(z) = \frac{1}{H'(H^{-1}(z))} = \frac{1}{h(H^{-1}(z))}.$$

Mit der Kettenregel folgt, dass

$$y'(t) = (H^{-1})'(G(t))G'(t) = \frac{1}{h(H^{-1}(G(t)))}g(t) = \frac{1}{h(y(t))}g(t)$$

für alle  $t$  nahe bei  $t_0$ . □

Man beachte, dass aus dem obigen konkreten Verfahren die lokale Eindeutigkeit der im Satz 2.6 gefundenen Lösung folgt.

Zur Erinnerung wiederholen wir kurz den Mittelwertsatz aus Analysis I.

**Satz** (Mittelwertsatz). Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bildlich: Es gibt einen Punkt  $\xi \in (a, b)$ , in dem die Tangente an den Graphen von  $f$  denselben Anstieg hat wie die Sekante durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$ .

**Folgerung.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar und  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Dann ist  $f$  streng monoton wachsend.

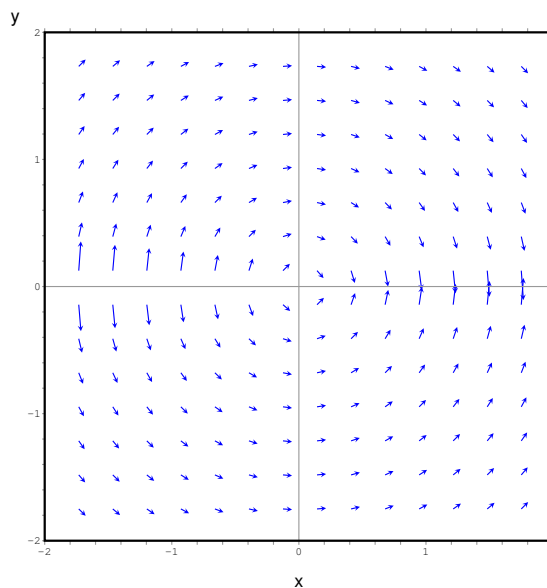
*Beweis.* Andernfalls existieren  $a', b' \in [a, b]$  mit  $a' < b'$  und  $f(a') \geq f(b')$ . Der Mittelwertsatz, angewendet auf die Einschränkung  $f|_{[a', b']}$ , liefert ein  $\xi \in (a', b')$  mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} \leq 0$$

im Widerspruch zur Annahme an  $f'$ . □

**Beispiel 2.7.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{t}{y} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

Abbildung 3: Richtungsfeld zur DGL  $y' = -t/y$ 

Im zugehörigen Richtungsfeld steht in jedem Punkt  $(t, y)$  der Richtungsvektor  $(1, -t/y)$  senkrecht auf  $(t, y)$ . Wir wenden Satz 2.6 mit  $g(t) = -t$  und  $h(y) = y$  an und erhalten als Lösung

$$-\frac{1}{2}t^2 = \int_0^t -s ds = \int_1^y z dz = \frac{1}{2}(y^2 - 1),$$

also

$$y(t) = \sqrt{1 - t^2}, \quad t \in [-1, 1],$$

wobei wir als Umkehrabbildung die positive Wurzelfunktion gewählt haben, da die Anfangsbedingung  $y(0) = 1$  gelten muss. Diese Lösung ist definiert für alle  $t \in [-1, 1]$  und erfüllt die gegebene DGL für alle  $t \in (-1, 1)$ . Zur Probe rechnen wir:

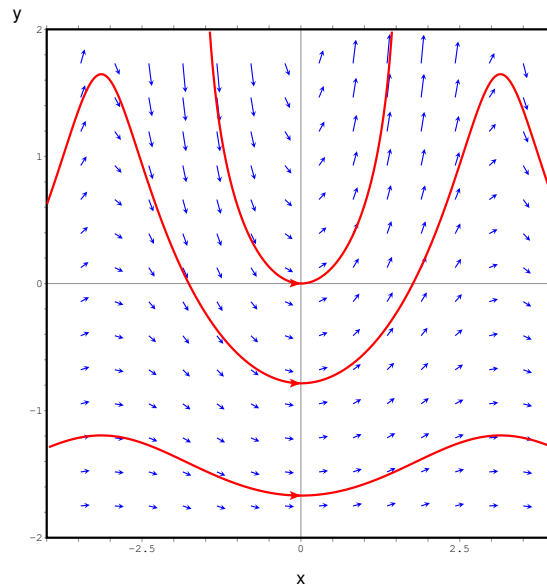
$$y'(t) = \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = -\frac{t}{y(t)}, \quad t \in (-1, 1).$$

**Beispiel 2.8.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = e^y \sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0$$

und erhalten

$$e^{-y_0} - e^{-y} = \int_{y_0}^y e^{-z} dz = \int_0^t \sin s ds = 1 - \cos t,$$

Abbildung 4: Richtungsfeld und Lösungen zur DGL  $y' = e^y \sin t$ 

also

$$y(t) = -\ln(e^{-y_0} + \cos t - 1), \quad \text{sofern } e^{-y_0} + \cos t - 1 > 0.$$

Da  $e^{-y_0} > 0$  und  $\cos 0 = 1$ , ist die Bedingung  $e^{-y_0} + \cos t - 1 > 0$  zumindest erfüllt, wenn  $|t|$  hinreichend klein ist. Sie ist genau dann für alle  $t \geq 0$  erfüllt, wenn  $e^{-y_0} > 2$ , also wenn  $y_0 \leq -\ln 2$ .

### Substitutionen zur Rückführung auf getrennte Variablen

Folgende DGLn können durch Substitution auf eine DGL mit getrennten Variablen zurückgeführt werden:

- Die DGL

$$y' = f(at + by + c) \quad \text{mit } b \neq 0 \quad (11)$$

löst man durch die Substitution

$$u(t) := at + by(t) + c.$$

Man erhält für  $u$  die DGL

$$u'(t) = a + by'(t) = a + bf(u(t)),$$

bei der die rechte Seite nur von  $u(t)$  abhängt. Diese DGL löst man mit Satz 2.6. Aus  $u$  kann man dann einfach  $y$  berechnen.



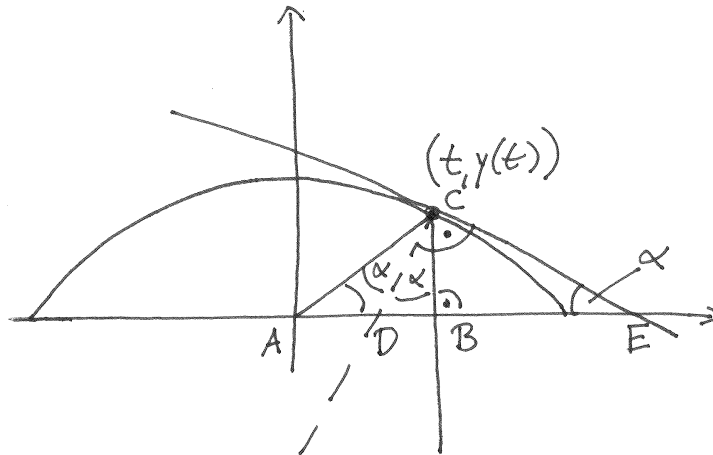


Abbildung 5: Parabolspiegel

- Eine DGL der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \quad (12)$$

heißt *Euler-homogene* oder *Ähnlichkeits-DGL*. Solch eine ist in Beispiel 2.7 bereits aufgetreten. Die Substitution

$$u(t) := \frac{y(t)}{t}$$

führt zu der DGL

$$u'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{f(u(t))}{t} - \frac{u(t)}{t} = \frac{f(u(t)) - u(t)}{t},$$

die wieder mit Satz 2.6 gelöst werden kann.

Nach Durchführen dieser Substitutionen kann es immer noch passieren, dass die in Satz 2.6 zu bildenden Integrale schwierig oder nicht explizit zu bestimmen sind.

**Beispiel 2.9** (Parabolspiegel). Im Nullpunkt der Ebene befinde sich eine punktförmige Lichtquelle. Wir suchen einen Spiegel, der alle ihre Strahlen parallel zur  $y$ -Achse reflektiert, und beschreiben ihn durch eine Kurve  $y$ . Wir betrachten einen Punkt  $(t, y(t))$  auf dieser Kurve; siehe Abbildung 5. Die Betrachtung der Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle CDE$  liefert

$$\frac{t}{y(t)} = \tan 2\alpha \quad \text{und} \quad y'(t) = -\tan \alpha.$$

Die Additionstheoreme der Winkelfunktionen liefern

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = 2 \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2 \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha},$$

also

$$-\frac{t}{y(t)} = \frac{2y'(t)}{1 - y'(t)^2}.$$

Wir bilden die Kehrwerte, multiplizieren mit  $2y'(t)$  und erhalten für  $y'(t)$  die quadratische Gleichung

$$y'(t)^2 - 2\frac{y(t)}{t}y'(t) - 1 = 0.$$

Die quadratische Lösungsformel liefert

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} \pm \sqrt{\frac{y(t)^2}{t^2} - 1},$$

also eine Euler-homogene DGL. Die obige Substitution  $u(t) = y(t)/t$  führt auf

$$u'(t) = \pm \frac{\sqrt{u(t)^2 + 1}}{t}$$

und anschließende Trennung der Variablen auf

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \pm \int \frac{dt}{t}.$$

Die Integration beider Seiten und geeignete Umformungen liefern schließlich

$$u(t) = \pm \frac{\alpha t - \frac{1}{\alpha t}}{2} \text{ mit } \alpha = e^c$$

und

$$y(t) = u(t)t = \pm \frac{\alpha t^2 - \frac{1}{\alpha}}{2}.$$

### 3 Lineare DGL erster Ordnung

Wir betrachten nochmal unser einfachstes Modell zur Entwicklung einer Population (vgl. Beispiel 1.3):

$$y' = \lambda y. \quad (13)$$

Nehmen wir nun an, dass

- die Vermehrungsrate  $\lambda$  nicht konstant bleibt, sondern zeitlich schwankt (z.B. durch Umwelteinflüsse),
- der Population mit einer gewissen Rate Mitglieder entnommen oder zugeführt werden,

so müssen wir (13) ersetzen durch die DGL

$$y' = \lambda(t)y + \mu(t) \quad \text{bzw.} \quad y' - \lambda(t)y = \mu(t) \quad (14)$$

mit gewissen Funktionen  $\lambda$  und  $\mu$ .

**Definition 3.1.** Eine DGL der Form (14) heißt lineare skalare DGL 1. Ordnung. Im Fall  $\mu \equiv 0$  heißt sie homogen, sonst inhomogen. Entsprechend spricht man von linearen (homogenen/inhomogenen) AWPen.

Wir gehen später auf die Ähnlichkeit zu linearen Gleichungssystemen ein.

#### Lösung im homogenen Fall

Wie löst man solch eine lineare DGL? Im *homogenen Fall* durch Trennung der Variablen: Ist  $y(t) = 0$  für ein bestimmtes  $t$ , so folgt  $y'(t) = 0$  und wir erhalten  $y \equiv 0$  (lokal) als *triviale Lösung*. Im Fall  $y(t) \neq 0$  können wir die Variablen trennen:

$$y'(t) = \lambda(t)y(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \lambda(t) \quad \Leftrightarrow \quad \ln |y(t)| = \int \lambda(t) dt.$$

**Satz 3.2.** Es habe  $\lambda: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion  $\Lambda$  (z.B. sei  $\lambda$  stetig,  $t_0 \in (a, b)$  und  $\Lambda(t) = \int_{t_0}^t \lambda(s) ds$ ). Dann hat die lineare homogene DGL

$$y' - \lambda(t)y = 0$$

auf  $(a, b)$  die allgemeine Lösung

$$y(t) = Ce^{\Lambda(t)} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \quad (15)$$

Insbesondere hat für jedes  $t_0 \in (a, b)$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  das lineare homogene AWP

$$y' - \lambda(t)y = 0 \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

auf  $[t_0, b)$  eine eindeutige Lösung, gegeben durch  $y(t) = y_0 e^{(\Lambda(t) - \Lambda(t_0))}$ .

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 2.6, wobei sich der Beweis noch vereinfacht: (15) definiert eine Lösung, weil nach Kettenregel und Definition der Stammfunktion gilt:

$$y'(t) = C\Lambda'(t)e^{\Lambda(t)} = \lambda(t)y(t), \quad t \in (a, b).$$

Ist  $\tilde{y}$  eine (beliebige) weitere Lösung, so hat die Funktion gegeben durch

$$z(t) = \tilde{y}(t)e^{-\Lambda(t)} \tag{16}$$

für  $t \in (a, b)$  die Ableitung

$$z'(t) = \tilde{y}'(t) \cdot e^{-\Lambda(t)} + \tilde{y}(t) \cdot (-\lambda(t)e^{-\Lambda(t)}) = \lambda(t)\tilde{y}(t)e^{-\Lambda(t)} - \lambda(t)\tilde{y}(t)e^{-\Lambda(t)} = 0.$$

Die Funktion  $z$  ist also konstant, d.h.  $\tilde{y}(t) = \underbrace{z(t)}_{=:C} e^{\Lambda(t)}$ . Die Aussage zum AWP folgt analog.  $\square$

### Lösung im inhomogenen Fall durch Variation der Konstanten

Die inhomogene DGL

$$y' - \lambda(t)y = \mu(t)$$

löst man, indem man

1. eine nicht-triviale Lösung  $y_h$  der zugehörigen homogenen DGL  $y' - \lambda(t)y = 0$  bestimmt (Satz 3.2),
2. den Ansatz

$$y(t) = c(t)y_h(t)$$

benutzt: Dieser liefert

$$\begin{aligned} y'(t) - \lambda(t)y(t) &= c'(t)y_h(t) + c(t)y_h'(t) - \lambda(t)c(t)y_h(t) && \text{(Produktregel)} \\ &= c'(t)y_h(t) + c(t) \cdot 0 && \text{(weil } y_h \text{ die homogene DGL löst)} \end{aligned} \tag{17}$$

und somit

$$c'(t) = \frac{\mu(t)}{y_h(t)}.$$

(Warum kann man hier durch  $y_h(t)$  teilen?) Setzen wir für  $y_h$  die Formel aus Satz 3.2 ein und nehmen wir zur Vereinfachung an, dass  $\lambda$  und  $\mu$  stetig sind, so erhalten wir folgenden Satz.

**Satz 3.3.** Es seien  $\lambda, \mu: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $t_0 \in (a, b)$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Dann hat das inhomogene lineare AWP

$$y' - \lambda(t)y = \mu(t), \quad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung. Diese ist gegeben durch

$$y(t) = y_0 e^{\Lambda(t)} + \int_{t_0}^t \mu(s) e^{\Lambda(t) - \Lambda(s)} ds \quad \text{mit} \quad \Lambda(t) = \int_{t_0}^t \lambda(s) ds. \quad (18)$$

*Beweis.* Mit (17) folgt, dass (18) eine Lösung ist, denn  $y_h(t) := e^{\Lambda(t)}$  löst die homogene DGL und

$$c(t) := y_0 + \int_{t_0}^t \mu(s) e^{-\Lambda(s)} ds \quad (19)$$

erfüllt  $c'(t) = \mu(t) e^{-\Lambda(t)} = \mu(t)/y_h(t)$ .

Eindeutigkeit der Lösung: siehe Übung.  $\square$

Wir betrachten ein paar Beispiele.

**Beispiel 3.4** (Mischprozess [Heu09]). Ein Tank enthalte 1000 Liter Wasser, in dem 50 kg Salz gelöst sind. Beginnend mit der Zeit  $t_0 = 0$  sollen ständig pro Minute

- 10 Liter der Lösung ausfließen und
- 10 Liter Wasser mit einem Salzgehalt von 2 kg zufließen.

Ein Superrührgerät mische das Ganze sofort und vollständig durcheinander. Wie groß ist der Salzgehalt im Tank zur Zeit  $t > 0$ ?

*Modell:* Bezeichne  $y(t)$  den Salzgehalt (in kg) im Tank zum Zeitpunkt  $t$ . In einer kurzen Zeit von  $\Delta t$  Minuten fließt dann etwa

- $\frac{10 \frac{L}{\text{min}}}{1000L} \cdot y(t) \cdot \Delta t$  Salz ab und
- $2 \frac{\text{kg}}{\text{min}} \cdot \Delta t$  Salz zu,

was uns zum folgenden AWP führt:

$$y' = 2 - \frac{1}{100}y \quad \text{mit} \quad y(0) = 50.$$

*Lösungs-Schritt 1:* Eine Lösung der homogenen DGL  $y' = -\frac{1}{100}y$  ist gegeben durch

$$y_h(t) = e^{-\frac{t}{100}}.$$

*Lösungs-Schritt 2:* Wir lösen die inhomogene DGL durch Variation der Konstanten mit dem Ansatz  $y(t) = c(t)y_h(t)$  und erhalten nach Einsetzen in die DGL

$$c'(t) = 2e^{\frac{t}{100}},$$

also

$$c(t) = 200e^{\frac{t}{100}} + c_0 \quad \text{für ein } c_0 \in \mathbb{R}$$

und somit

$$y(t) = y_h(t)c(t) = c_0e^{-\frac{t}{100}} + 200.$$

*Lösung Schritt 3:* Zur Erfüllung der Anfangsbedingung  $y(0) = 50$  muss  $c_0 = 50 - 200 = -150$  gewählt werden, also

$$y(t) = 200 - 150e^{-\frac{t}{100}}.$$

*Folgerung:* Der Salzgehalt des Tankes stabilisiert sich also bei

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 200 \text{ kg},$$

die Konzentration also bei 200kg/1000L, was der Konzentration des Zuflusses (2kg/10L) entspricht.

**Beispiel 3.5.** Ein Pferd läuft in  $x$ -Richtung bei  $x(0) = l > 0$  mit konstanter Geschwindigkeit  $v_p$  los. Ein beliebig dehnbare homogenes Band ist mit einem Ende im Nullpunkt und mit dem anderem am Pferd befestigt. Eine Schnecke beginnt gleichzeitig mit dem Pferd im Nullpunkt mit konstanter Eigengeschwindigkeit  $v_s$  auf dem Band zu laufen (und wird durch die Dehnung des Bandes zusätzlich befördert).

*Frage:* Wird die Schnecke das Pferd erreichen? Falls ja, wann?

*Modellierung:* Für den Ort  $x(t)$  des Pferdes zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich

$$x(t) = v_p t + l.$$

Für den Ort  $y(t)$  der Schnecke zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich das lineare AWP

$$y'(t) = v_s + \frac{y(t)}{x(t)}v_p = v_s + \frac{v_p}{v_p t + l}y(t), \quad y(0) = 0.$$

*Lösungs-Schritt 1:* Wir bestimmen die Lösung der zugehörigen homogenen DGL (äquivalent:  $v_s = 0$ , die Schnecke bewegt sich nicht selbst) durch Trennung der Variablen:

$$y_h(t) = e^{\int \frac{v_p}{v_p t + l} dt} = e^{\ln(v_p t + l) + c_1} = (v_p t + l)e^{c_1} \quad \text{mit } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Wir brauchen nur eine Lösung und wählen dafür  $c_1 = 0$ . (Die entsprechende Lösung  $y_h(t) = v_p t + l = x(t)$  hätten wir statt mit Rechnen auch durch inhaltliche Überlegung erhalten können: Die homogene DGL beschreibt den Transport der Schnecke durch das Gummiband ohne zusätzliche eigene Bewegung und im Fall  $y_h(0) = l$  sitzt die Schnecke beim Pferd, woraus  $y_h(t) = x(t)$  für alle  $t$  folgt.)

*Lösungs-Schritt 2:* Nun lösen wir das inhomogene AWP durch Variation der Konstanten: Der Ansatz  $y(t) = c(t)y_h(t)$  führt zu

$$c'(t) = \frac{v_s}{y_h(t)} = \frac{v_s}{v_p t + l},$$

also

$$c(t) = \frac{v_s}{v_p} \ln(v_p t + l) + c_2 \quad \text{mit } c_2 \in \mathbb{R}$$

und

$$y(t) = \left( \frac{v_s}{v_p} \ln(v_p t + l) + c_2 \right) (v_p t + l).$$

*Lösungs-Schritt 3:* Die Anfangsbedingung  $y(0) = 0$  erfordert  $c_2 = -\frac{v_s}{v_p} \ln l$ . Nach Umstellen erhalten wir

$$y(t) = (v_p t + l) \frac{v_s}{v_p} \ln \left( \frac{v_p t + l}{l} \right).$$

*Zur Ausgangsfrage:* Die Schnecke erreicht das Pferd zum Zeitpunkt  $t$ , bestimmt durch

$$\begin{aligned} x(t) = y(t) &\Leftrightarrow v_p t + l = (v_p t + l) \frac{v_s}{v_p} \ln \left( \frac{v_p t + l}{l} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{v_p}{v_s} = \ln \left( \frac{v_p t + l}{l} \right) \\ &\Leftrightarrow t = \frac{l}{v_p} \left( e^{\frac{v_p}{v_s}} - 1 \right). \end{aligned}$$

**Beispiel 3.6** (Logistische Gleichung). In Umgebungen mit begrenzten Ressourcen stößt das Modell  $y' = \alpha y$  zur Bakterienvermehrung mit seinem exponentiellen Wachstum gegeben durch  $y(t) = C e^{\alpha t}$  an Grenzen. Für ein begrenztes Wachstum schlug Pierre-François Verhulst 1838 folgendes Modell vor:

Bezeichnet  $y_{\max}$  die maximal mögliche Populationsgröße, so geht die *verbleibende Kapazität*  $y_{\max} - y(t)$  als Faktor in (4) ein, also

$$y' = \lambda \cdot y \cdot (y_{\max} - y) \tag{20}$$

mit einem gewissen Faktor  $\lambda > 0$ .

Diese Gleichung hat zwei *stationäre Lösungen* bzw. *Gleichgewichtspunkte*

$$y_1 \equiv 0 \quad \text{und} \quad y_2 \equiv y_{\max}.$$

Für alle Startwerte  $y_0 \in (0, \infty)$  nähert sich die Lösung erst schneller und dann immer langsamer dem Wert  $y_{\max}$  an, vgl. Abbildung 6. Dieses Modell beschreibt viele

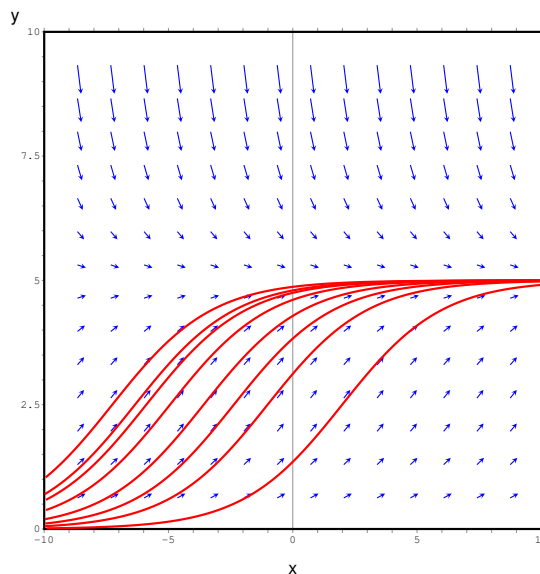


Abbildung 6: Logistisches Wachstum

Wachstumsprozesse von Populationen und Organismen recht genau, zum Beispiel die Vermehrung von Fruchtfliegen, die Gewichtszunahme bei Ratten, das Höhenwachstum bei Sonnenblumen und viele weitere [Heu09, §1].

Gleich werden wir sehen, wie sich (20) durch eine geschickte Substitution auf eine lineare DGL zurückführen lässt. Zur Übung lösen wir jetzt (20) durch Trennung der Variablen. Satz 2.6 liefert für eine Lösung  $y$  mit Startwert

$$y(t_0) = y_0 \in (0, y_{\max}) \tag{21}$$

zunächst

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dz}{z(y_{\max} - z)} = \int_{t_0}^t \lambda ds = \lambda(t - t_0). \tag{22}$$

Für das Integral links verwenden wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z(y_{\max} - z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{y_{\max} - z},$$

wobei  $A, B \in \mathbb{R}$  aus der Gleichung

$$A(y_{\max} - z) + Bz = 1, \quad \text{also} \quad -A + B = 0 \quad \text{und} \quad Ay_{\max} = 1$$



bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dz}{z(y_{\max} - z)} &= \frac{1}{y_{\max}} \int_{y_0}^{y(t)} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{y_{\max} - z} \right) dz \\ &= \frac{1}{y_{\max}} [\ln z - \ln(y_{\max} - z)]_{z=y_0}^{z=y(t)} \\ &= \frac{1}{y_{\max}} \ln \frac{y(t)(y_{\max} - y_0)}{y_0(y_{\max} - y(t))} \\ &= \frac{1}{y_{\max}} \ln \frac{\alpha y(t)}{y_{\max} - y(t)} \quad \text{mit } \alpha = \frac{y_{\max} - y_0}{y_0} = \frac{y_{\max}}{y_0} - 1, \end{aligned}$$

wobei wir (21) verwendet haben. Einsetzen in (22) liefert

$$\frac{\alpha y(t)}{y_{\max} - y(t)} = e^{y_{\max} \lambda (t - t_0)}$$

beziehungsweise nach Umstellen

$$y(t) = y_{\max} \frac{e^{\lambda y_{\max} (t - t_0)}}{\frac{y_{\max}}{y_0} + e^{\lambda y_{\max} (t - t_0)} - 1}.$$

Insbesondere erkennt man  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\max}$ .

## Rückführung von Bernoulli-DGLn auf lineare DGLn

Eine DGL der Form

$$y' + \lambda(t)y + \mu(t)y^\alpha = 0 \quad \text{mit } \alpha \notin \{0, 1\}$$

heißt *Bernoulli-DGL*. Wir nehmen an, dass  $y(t) > 0$ , multiplizieren mit  $(1 - \alpha)y(t)^{-\alpha}$  und erhalten

$$\begin{aligned} \underbrace{(1 - \alpha)y'(t)y(t)^{-\alpha}} + (1 - \alpha)\lambda(t)y(t)^{1-\alpha} + (1 - \alpha)\mu(t) &= 0. \\ &= \frac{d}{dt} (y(t)^{1-\alpha}) \end{aligned}$$

Die Substitution  $z(t) := y(t)^{1-\alpha}$  führt dann zu der linearen DGL

$$z' + (1 - \alpha)\lambda(t)z + (1 - \alpha)\mu(t) = 0,$$

die mit Satz 3.3 gelöst werden kann.

**Beispiel 3.7** (Logistische Gleichung). Die logistische DGL

$$y' = \lambda y(y_{\max} - y)$$

kann geschrieben werden als

$$y' - \lambda y_{\max} y + \lambda y^2 = 0.$$

Wir erkennen eine Bernoullische DGL mit  $\alpha = 2$  und erhalten wie oben für  $z(t) := y(t)^{-1}$  die lineare DGL

$$z' + \lambda y_{\max} z - \lambda = 0.$$

Mit Satz 3.3 erhält man als Lösung

$$z(t) = C e^{-\lambda y_{\max} t} + \frac{1}{y_{\max}} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

und somit hat jede positive Lösung von (20) die Form

$$y(t) = \frac{1}{C e^{-\lambda y_{\max} t} + \frac{1}{y_{\max}}} = y_{\max} \frac{e^{\lambda y_{\max} t}}{\gamma + e^{\lambda y_{\max} t}} \quad \text{mit geeignetem } \gamma \in \mathbb{R}.$$

## 4 Existenz und Eindeutigkeit nach Picard-Lindelöf

Die bislang betrachteten Lösungsverfahren für AWPe lieferten in manchen Fällen insbesondere die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Wir wollen nun die Theorie weiterentwickeln und für explizite skalare AWPe 1. Ordnung der Form

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

den nützlichen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen von Picard und Lindelöf formulieren und beweisen. Die dazu erforderlichen Voraussetzungen an  $f$  (z.B. Stetigkeit) präzisieren wir später.

### Grundidee der Fixpunkt-Iteration

Die Grundidee des Satzes von Picard-Lindelöf ist die Anwendung einer *Fixpunkt-Iteration*:

- (i) Wir schreiben das AWP als Integralgleichung um:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t y'(s) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (23)$$

- (ii) Wir betrachten die Abbildung  $P$ , die einer Funktion  $y$  die Funktion  $P(y)$  definiert durch

$$(P(y))(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

zuordnet. Eine Funktion  $y$  erfüllt also die obige Integralgleichung (23) genau dann, wenn sie ein Fixpunkt von  $P$  ist, also wenn  $P(y) = y$  gilt.

- (iii) Um einen Fixpunkt von  $P$  zu finden, starten wir mit einer Näherung  $y_1$  der Lösung (z.B.  $y_1(t) = y_0$  für alle  $t$ ) und konstruieren schrittweise (hoffentlich bessere) Näherungen gegeben durch

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds = (P(y_n))(t).$$

Wir hoffen also, dass die durch *Fixpunkt-Iteration* konstruierte Folge

$$y_2 = P(y_1), \quad y_3 = P(y_2) = P^2(y_1), \quad \dots, \quad y_{n+1} = P^n(y_1), \quad \dots$$

gegen einen Fixpunkt  $y$  von  $P$  konvergiert.

Ähnliche Verfahren benutzt man in der Mathematik öfter (siehe Übungen).

## Vorbereitungen

Die gewünschte Konvergenz der Fixpunkt-Iteration im Beweis vom Satz von Picard-Lindelöf zeigt man mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Wir wiederholen dafür einige Begriffe.

**Definition 4.1.** Eine Norm auf einem reellen Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty)$  mit folgenden Eigenschaften: Für alle  $v, w \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

- $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$  (Definitheit),
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  (Homogenität),
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (Subadditivität/Dreiecksungleichung).

Man nennt dann  $(V, \|\cdot\|)$  einen normierten Raum.

**Definition 4.2.** Eine Metrik auf einer nicht-leeren Menge  $X$  ist eine Abbildung  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  mit folgenden Eigenschaften: Für alle  $x, y, z \in X$  gilt

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (Definitheit),
- $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie),
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Dreiecksungleichung).

Man nennt dann  $(X, d)$  einen metrischen Raum.

Für jede nicht-leere Teilmenge  $D$  eines normierten Raumes  $(V, \|\cdot\|)$  wird durch

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik auf  $D$  definiert.

**Definition 4.3.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

- Eine Cauchy-Folge in  $(X, d)$  ist eine Folge  $(x_n)_n$  in  $X$  mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

- Man nennt  $(X, d)$  vollständig, wenn jede Cauchy-Folge  $(x_n)_n$  in  $X$  gegen einen Grenzwert  $x \in X$  konvergiert (d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : d(x_n, x) < \varepsilon$ .)
- Ein Banachraum ist ein normierter Raum, der bezüglich der assoziierten Metrik vollständig ist.

**Proposition 4.4.** *Der Raum  $C([a, b]; \mathbb{R})$  aller stetigen Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Vektorraum bezüglich der punktweise definierten Operationen*

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t)$$

und ein Banachraum bezüglich (der Metrik assoziiert zu) der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a, b]} \{|f(t)|\}.$$

Für jedes Intervall  $[c, d]$  in  $\mathbb{R}$  ist die Teilmenge  $D := C([a, b]; [c, d])$  aller stetigen Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$  vollständig.

*Beweis.* Dass  $C([a, b]; \mathbb{R})$  ein Vektorraum ist und dass  $\|\cdot\|_\infty$  eine Norm auf  $C([a, b]; \mathbb{R})$  definiert, ist bekannt aus Analysis II. Wir zeigen die Vollständigkeit bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$ . Sei  $(f_n)_n$  eine Cauchy-Folge in  $C([a, b]; \mathbb{R})$ . Für jedes  $t \in [a, b]$  ist wegen

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

auch  $(f_n(t))_n$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  und somit konvergent (in  $\mathbb{R}$ ). Wir definieren

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t).$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert nach Voraussetzung ein  $N$  mit  $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$  für alle  $m, n > N$ . Wähle jetzt  $s \in [a, b]$  fest. Für  $m, n > N$  gilt:

$$\begin{aligned} |f(s) - f_n(s)| &\leq |f(s) - f_m(s)| + \|f_m - f_n\|_\infty \\ &< |f(s) - f_m(s)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Für  $m \rightarrow \infty$  erhalten wir:  $|f(s) - f_n(s)| \leq \varepsilon$  für  $n > N$ . Dies ist unabhängig von dem gewählten  $s$ , also  $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$  für  $n > N$ . Es folgt, dass  $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , also  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $[a, b]$ . Deshalb ist  $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ . Dies beweist die Vollständigkeit des Raumes  $C([a, b]; \mathbb{R})$ .

Die Behauptung, dass  $D$  vollständig ist, folgt genau wie oben: Wenn  $(f_n)_n$  eine Cauchy-Folge in  $D$  ist, ist  $(f_n(t))_n$  für jedes  $t \in [a, b]$  eine Cauchy-Folge in  $[c, d]$ . Die Funktion definiert durch  $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  nimmt jetzt Werte in  $[c, d]$  an. Die Behauptungen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$  und dass  $f$  stetig ist, folgen genau wie oben.  $\square$

Im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf werden wir den Banachschen Fixpunktsatz benutzen. Dieser ist ein Spezialfall des folgenden Satzes.

**Satz 4.5** (Fixpunktsatz von Weissinger). *Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  eine konvergente Reihe positiver Zahlen und  $F: X \rightarrow X$  eine Abbildung mit*

$$d(F^n(x), F^n(y)) \leq \alpha_n d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Dann existiert genau ein  $x \in X$  mit  $F(x) = x$ .

*Beweis.* Zunächst bemerken wir:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ .

*Eindeutigkeit:* Gilt  $F(x) = x$  und  $F(y) = y$ , dann gilt  $d(x, y) = d(F^n(x), F^n(y))$  für alle  $n \geq 1$ , aber

$$d(F^n(x), F^n(y)) \leq \alpha_n d(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also  $x = y$ .

*Existenz:* Sei  $x_0 \in X$  beliebig. Dann bilden die Elemente  $x_n := F^n(x_0)$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine Cauchy-Folge, denn

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F^n(x_1), F^n(x_0)) \leq \alpha_n d(x_1, x_0),$$

und mit der Dreiecksungleichung und mit der Voraussetzung, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  konvergent ist, folgt

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &= d(F^n(x_m), F^n(x_0)) \leq \alpha_n d(x_m, x_0) \\ &\leq \alpha_n (d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_1, x_0)) \\ &\leq \alpha_n \left( 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \right) d(x_1, x_0) \\ &\leq \alpha_n \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \right) d(x_1, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Da  $(X, d)$  vollständig ist, konvergiert  $(x_n)_n$  gegen ein  $x$ . Die Folge  $(F(x_n))_n$  konvergiert dann wegen  $d(F(x), F(x_n)) \leq \alpha_1 d(x, x_n)$  gegen  $F(x)$ , aber natürlich auch gegen  $x$ , da  $d(F(x_n), x) = d(x_{n+1}, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Deshalb gilt:  $F(x) = x$ .  $\square$

**Folgerung 4.6** (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum,  $\alpha < 1$  und  $F: X \rightarrow X$  eine Abbildung mit  $d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y)$  für alle  $x, y \in X$ . Dann existiert genau ein  $x \in X$  mit  $F(x) = x$ .*

*Beweis.* Für alle  $x, y \in X$  folgt

$$d(F^n(x), F^n(y)) \leq \alpha d(F^{n-1}(x), F^{n-1}(y)) \leq \dots \leq \alpha^n d(x, y).$$

Wir setzen  $\alpha_n = \alpha^n$ , bemerken dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  konvergent ist (geometrische Reihe) und können somit obigen Satz anwenden.  $\square$

## Der Satz von Picard-Lindelöf

Nach den Vorbereitungen betrachten wir nun für ein AWP

$$y' = f(t, y) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

die Folge der Näherungslösungen  $y_1, y_2, \dots$ , die aus der Startfunktion  $y_1$  gegeben durch  $y_1(t) = y_0$  mit Hilfe der Picard-Lindelöf-Iteration nach der Vorschrift

$$y_{n+1}(t) = (P(y_n))(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds$$

für  $n \geq 1$  gebildet werden.

**Beispiel 4.7.** Für das AWP

$$y' = y - t \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

erhalten wir mit der Startfunktion  $y_1$  gegeben durch  $y_1(t) = 1$ :

$$\begin{aligned} y_2(t) &= 1 + \int_0^t (1 - s) ds = 1 + t - \frac{t^2}{2}, \\ y_3(t) &= 1 + \int_0^t \left(1 + s - \frac{s^2}{2} - s\right) ds = 1 + \int_0^t \left(1 - \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + t - \frac{t^3}{6}. \end{aligned}$$

Wir können daraus die Form von  $y_n$  erraten: Für  $n = 1, 2, 3$  gilt

$$y_n(t) = 1 + t - \frac{t^n}{n!}. \tag{24}$$

Für  $y_{n+1}(t)$  liefert diese Gleichung

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= 1 + \int_0^t (y_n(s) - s) ds \\ &= 1 + \int_0^t \left(1 + s - \frac{s^n}{n!} - s\right) ds \\ &= 1 + \int_0^t \left(1 - \frac{s^n}{n!}\right) ds \\ &= 1 + t - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Per Induktion folgt also (24) für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wie verhält sich die Folge  $(y_n)_n$  zur tatsächlichen Lösung des AWP? Das (lineare) AWP hat die (eindeutige) Lösung

$$y(t) = t + 1.$$

Der sogenannte Fehler

$$|y_n(t) - y(t)| = \frac{|t|^n}{n!}$$

weist das folgende typische Verhalten auf:

- Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  wird der Fehler bei wachsendem  $t$  beliebig groß:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{t \rightarrow \infty} |y_n(t) - y(t)| = \infty.$$

- Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  wird der Fehler bei wachsendem  $n$  beliebig klein:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n(t) - y(t)| = 0.$$

- Beschränken wir uns auf ein Intervall  $[-b, b]$  für ein  $b > 0$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n|_{[-b, b]} - y|_{[-b, b]}\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [-b, b]} \frac{|t|^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0,$$

das heißt, betrachten wir die Funktionen nur auf dem Intervall  $[-b, b]$ , so konvergiert  $(y_n)_n$  in  $C([-b, b], \mathbb{R})$  gegen  $y$  bezüglich der Supremumsnorm. Es ist *untypisch*, dass dies für *beliebig große*  $b > 0$  eintritt; allgemein ist diese Konvergenz nur für *hinreichend kleine Intervalle* um den Startpunkt  $t_0$  (hier 0) zu erwarten.

Nun kommen wir zum zentralen Ergebnis dieses Kapitels. Wir betrachten dazu das AWP

$$y' = f(t, y) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0. \quad (25)$$

**Satz 4.8** (Picard-Lindelöf). *Seien  $a, b > 0$ , sei  $R_{a,b}$  das Rechteck in  $\mathbb{R}^2$  gegeben durch*

$$R_{a,b} = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

*und sei  $f: R_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Die Funktion  $f$  erfülle eine Lipschitz-Bedingung bezüglich des zweiten Arguments, d.h. es existiert ein  $L \geq 0$ , sodass*

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \quad \text{für alle } (t, z_1), (t, z_2) \in R_{a,b}.$$

*Dann existiert genau eine Lösung  $y$  des AWP (25) auf dem Intervall  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , wobei*

$$\alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad \text{und} \quad M := \max \{|f(t, y)| \mid (t, y) \in R_{a,b}\}.$$

*Für jede stetige Funktion  $y_1: [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$  konvergiert die Folge  $(y_n)_n$ , iterativ definiert durch*

$$y_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds,$$

*gleichmäßig gegen die Lösung  $y$ .*

*Beweis. Schritt 1:* Sei  $\delta := \min \left\{ \alpha, \frac{1}{2L} \right\}$ . Wir beweisen zunächst Existenz und Eindeutigkeit der Lösung auf dem Intervall  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ . Wir wenden den Banachschen Fixpunktsatz auf den vollständigen metrischen Raum

$$X := C([t_0 - \delta, t_0 + \delta]; [y_0 - b, y_0 + b])$$

mit der Metrik gegeben durch

$$d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|_\infty$$

und die Abbildung  $P$ , definiert durch

$$(P(y))(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

an. Dazu prüfen wir:



- Für  $y \in X$  ist  $Py$  eine stetige Funktion, da  $f$  und  $y$  stetig sind, und für  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  gilt  $(P(y))(t) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ , denn

$$|(P(y))(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| \leq |t - t_0| M \leq M\delta \leq M\alpha \leq b.$$

Somit ist  $P(y) \in X$ . Also ist  $P$  als Abbildung von  $X$  nach  $X$  wohldefiniert.

- Wir zeigen, dass  $d(P(z_1), P(z_2)) \leq \frac{1}{2}d(z_1, z_2)$  für alle  $z_1, z_2 \in X$ . Für alle  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  gilt:

$$\begin{aligned} |(P(z_1))(t) - (P(z_2))(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, z_1(s)) - f(s, z_2(s))) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, z_1(s)) - f(s, z_2(s))| ds \end{aligned}$$

und

$$|f(s, z_1(s)) - f(s, z_2(s))| \leq L \|z_1 - z_2\|_\infty,$$

also

$$|(P(z_1))(t) - (P(z_2))(t)| \leq |t_0 - t| L \|z_1 - z_2\|_\infty \leq \delta L \|z_1 - z_2\|_\infty \leq \frac{L}{2L} \|z_1 - z_2\|_\infty$$

und somit  $d(P(z_1), P(z_2)) \leq \frac{1}{2}d(z_1, z_2)$ .

Somit können wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden und erhalten, dass

- es in  $X$  genau einen Fixpunkt von  $P$  gibt und
- für jedes  $y_1 \in X$  die Folge  $(y_n)_n = (P^n(y_1))_n$  auf  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  (also gleichmäßig) gegen einen Fixpunkt  $y$  von  $P$  konvergiert.

Fixpunkte von  $P$  waren aber genau die Lösungen des AWP.

*Schritt 2:* Wir nehmen die eindeutige Lösung  $y$  aus Schritt 1, wiederholen Schritt 1 für die neuen Startwerte  $(t_0 + \delta, y(t_0 + \delta))$  beziehungsweise  $(t_0 - \delta, y(t_0 - \delta))$  statt  $(t_0, y_0)$ , und erhalten Existenz und Eindeutigkeit auf dem Intervall  $[t_0 - 2\delta, t_0 + 2\delta]$ . So verfahren wir immer weiter, bis wir (in endlich vielen Schritten) das ganze Intervall  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  betrachtet haben. Die gleichmäßige Konvergenz der Näherungslösungen auf dem ganzen Intervall  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  folgt aus expliziten Abschätzungen.  $\square$

**Bemerkung 4.9.** Man kann bereits im Schritt 1 Existenz und Eindeutigkeit auf dem gesamten Intervall  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  erhalten, wenn man statt der Supremumsnorm die *Morgenstern-Norm*

$$\|y\| := \sup_{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} |y(t)e^{-\gamma t}|$$

für ein geeignetes  $\gamma > 0$  verwendet.

**Bemerkung 4.10.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und stetig partiell nach dem zweiten Argument differenzierbar. Dann erfüllt  $f$  auf jedem Rechteck  $R = [a, b] \times [c, d]$  mit  $R \subset U$  eine Lipschitz-Bedingung bezüglich des zweiten Arguments. (Der Beweis ist eine Übung.) Die Voraussetzungen des Satzes 4.8 sind also insbesondere erfüllt, wenn im AWP (25) die Funktion  $f$  auf einer offenen Menge  $U$  mit  $(t_0, y_0) \in U$  stetig und stetig partiell nach dem zweiten Argument differenzierbar ist und man ein Rechteck  $R_{a,b}$  betrachtet, das vollständig in  $U$  enthalten ist.

### Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten

Das *Langzeitverhalten* von Lösungen eines AWP's kann sehr unterschiedlich vom Anfangswert abhängen.

#### Beispiel 4.11.

1. Für das AWP

$$y' = \lambda y \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \lambda > 0, \quad y_0 \geq 0$$

ist die (eindeutige) Lösung  $t \mapsto y_0 e^{\lambda t}$  im Fall  $y_0 = 0$  konstant 0, während sie für jedes  $y_0 > 0$  beliebig groß wird.

2. Für die logistische DGL  $y' = \lambda y(y_{\max} - y)$  sahen wir hingegen, dass für jedes  $y_0 \in (0, y_{\max})$  die Lösung für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $y_{\max}$  konvergiert (siehe Beispiel 3.6).

Über *begrenzte Zeiträume* hingegen hängen die Lösung eines AWP's

$$y' = f(t, y) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

unter einfachen Annahmen an  $f$  stetig vom Startwert  $y_0$  ab. Das wollen wir jetzt zeigen; dazu benötigen wir verschiedene Abschätzungen. Wir beginnen mit einer einfachen Differential-Ungleichung.

**Lemma 4.12.** Sei  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar,  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\psi'(t) \leq \lambda \psi(t)$  für alle  $t \in (a, b)$ . Dann folgt  $\psi(t) \leq \psi(a)e^{\lambda(t-a)}$  für alle  $t \in [a, b]$ .

*Beweis.* Die Funktion  $\omega(t) = \psi(t)e^{\lambda(a-t)}$  erfüllt

$$\omega'(t) = (\psi'(t) - \lambda\psi(t))e^{\lambda(a-t)} \leq 0 \quad \text{für alle } t \in (a, b),$$

und somit für alle  $t \in [a, b]$ :

$$\psi(t)e^{\lambda(a-t)} = \omega(t) \leq \omega(a) = \psi(a). \quad \square$$

**Lemma 4.13** (Grönwall-Lemma). Sei  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, seien  $L, C \geq 0$  und

$$0 \leq \varphi(t) \leq C + L \int_a^t \varphi(s) ds \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Dann gilt

$$\varphi(t) \leq Ce^{L(t-a)} \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

*Beweis.* Die Funktion  $\psi$  definiert durch  $t \mapsto C + L \int_a^t \varphi(s) ds$  erfüllt

$$0 \leq \varphi(t) \leq \psi(t) \quad \text{und} \quad \psi'(t) = L\varphi(t) \leq L\psi(t).$$

Mit dem vorigen Lemma folgt

$$\varphi(t) \leq \psi(t) \leq \psi(a)e^{L(t-a)} = Ce^{L(t-a)}. \quad \square$$

**Satz 4.14** (Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten). *Seien  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $R := [a, b] \times [c, d]$  ein Rechteck mit  $R \subset U$ . Die Funktion  $f$  erfülle eine Lipschitz-Bedingung auf  $R$  mit Konstante  $L \geq 0$  bezüglich des zweiten Arguments. Wenn  $y$  und  $\tilde{y}$  Lösungen der DGL  $y' = f(t, y)$  sind, dann gilt:*

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq |y(a) - \tilde{y}(a)|e^{L(t-a)} \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

*Beweis.* Die Funktion  $\varphi(t) := |y(t) - \tilde{y}(t)|$  erfüllt

$$\begin{aligned} \varphi(t) = |y(t) - \tilde{y}(t)| &= \left| y(a) + \int_a^t y'(s) ds - \tilde{y}(a) - \int_a^t \tilde{y}'(s) ds \right| \\ &\leq |y(a) - \tilde{y}(a)| + \int_a^t |f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))| ds \\ &\leq \varphi(a) + \int_a^t L|y(s) - \tilde{y}(s)| ds \\ &\leq \varphi(a) + L \int_a^t \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Das Grönwall-Lemma liefert nun die gewünschte Ungleichung. □

## 5 Exakte Differentialgleichungen

### Vorbemerkungen

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann können wir zu jedem  $c \in \mathbb{R}$  die Niveaumenge

$$F^{-1}(c) = \{(x, y) \in U \mid F(x, y) = c\}$$

betrachten. In jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in U$  mit  $DF(x_0, y_0) \neq 0$  steht der Gradient

$$\text{grad } F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 F(x_0, y_0) \\ \partial_2 F(x_0, y_0) \end{pmatrix} = ((DF)(x_0, y_0))^\top$$

senkrecht zu der entsprechenden Niveaumenge  $F^{-1}(c)$  (mit  $c = F(x_0, y_0)$ ), im Sinne des folgenden Lemmas.

**Lemma 5.1.** *Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow U$  stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$F \circ \gamma \text{ ist konstant} \iff \text{grad } F(\gamma(t)) \perp \gamma'(t) \text{ für alle } t \in (\alpha, \beta). \quad (26)$$

*Beweis.* Nach der Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned} (F \circ \gamma)'(t) &= (DF)(\gamma(t))\gamma'(t) \\ &= \partial_1 F(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \partial_2 F(\gamma(t))\gamma'_2(t) = \langle \text{grad } F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Die beiden Bedingungen im Lemma sind äquivalent dazu, dass dieser Ausdruck für alle  $t \in (\alpha, \beta)$  gleich Null ist.  $\square$

**Beispiel 5.2.** Für  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  gilt:

- Für jedes  $c \geq 0$  ist die Niveaumenge  $F^{-1}(c)$  der Kreis (in  $\mathbb{R}^2$ ) mit Mittelpunkt  $(0, 0)$  und Radius  $\sqrt{c}$ .
- Die Funktion  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto \sqrt{c}(\cos t, \sin t)$  ist eine Kurve, die in der Niveaumenge zu  $c \geq 0$  verläuft.
- Es gilt:  $\text{grad } F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ , also  $\text{grad } F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 2\gamma_1(t) \\ 2\gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{c} \cos t \\ 2\sqrt{c} \sin t \end{pmatrix}$ .

Außerdem gilt:  $\gamma'(t) = \sqrt{c}(-\sin t, \cos t)$ . Es gilt also tatsächlich:

$$\langle \text{grad } F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Was haben obige Überlegungen mit Differentialgleichungen zu tun? Für eine Kurve der Form

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

wird  $\gamma_1'(t) = 1$ ,  $\gamma_2'(t) = y'(t)$  und (26) ist dann äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \begin{pmatrix} \partial_1 F(t, y(t)) \\ \partial_2 F(t, y(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \partial_1 F(t, y(t)) + \partial_2 F(t, y(t))y'(t) \text{ für alle } t \in (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Differentialgleichungen dieser Form sind sehr wichtig.

**Definition 5.3.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und seien  $P, Q: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Eine DGL der Form

$$P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y' = 0 \quad (27)$$

heißt exakt (auf  $U$ ), falls eine stetig differenzierbare Funktion  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, für die

$$P = \partial_1 F \quad \text{und} \quad Q = \partial_2 F \quad (28)$$

gilt. Wir nennen dann  $F$  ein Potential von  $(P, Q)$ .

Lösungen einer exakten DGL verlaufen immer in Niveaumengen von  $F$ :

**Satz 5.4.** Sei eine exakte DGL wie in Definition 5.3 gegeben.

(i) Ist  $F$  ein Potential von  $(P, Q)$ , so gilt für jede stetig differenzierbare Funktion  $y: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$y \text{ löst (27)} \iff F(t, y(t)) \text{ ist konstant.}$$

Sei ferner  $(t_0, y_0) \in U$  und  $Q(t_0, y_0) \neq 0$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit folgenden Eigenschaften:

- (ii) Es gibt eine stetig differenzierbare Lösung  $y: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  der DGL (27) mit  $y(t_0) = y_0$ .
- (iii) Ist  $\tilde{y}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Lösung der DGL mit  $\tilde{y}(t_0) = y_0$ , so stimmt  $\tilde{y}$  auf  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap (\alpha, \beta)$  mit  $y$  überein.

*Beweis.* (i): Unsere Vorbemerkungen zeigten:

$$\begin{aligned} F(t, y(t)) \text{ ist konstant} &\iff \partial_1 F(t, y(t)) + \partial_2 F(t, y(t))y'(t) = 0 \text{ für alle } t \in (\alpha, \beta) \\ &\iff P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y'(t) = 0 \text{ für alle } t \in (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

(ii): Wir betrachten die Gleichung  $F(t, y) = c$  für  $c = F(t_0, y_0)$ . Der Satz von der impliziten Funktion (betrachte gegebenenfalls die Funktion  $G := F - c$ ) liefert wegen  $\partial_2 F(t_0, y_0) = Q(t_0, y_0) \neq 0$  die Existenz eines  $\delta > 0$  und eines eindeutigen stetig differenzierbaren  $y: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(t_0) = y_0$  und  $F(t, y(t)) = F(t_0, y_0)$  für alle  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ . Man sieht mit (i), dass dieses  $y$  die DGL löst.

(iii): Ähnlich. □

**Beispiel 5.5.** Die DGL

$$2t + 2yy' = 0$$

ist exakt und ein Potential ist gegeben durch  $F(t, y) = t^2 + y^2$ , denn  $\partial_1 F(t, y(t)) = 2t$  und  $\partial_2 F(t, y(t)) = 2y(t)$ . Auflösung von  $F(t, y(t)) = c$  nach  $y(t)$  ergibt die Lösungen gegeben durch

$$y(t) = \pm\sqrt{c - t^2}, \quad t \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c}).$$

Für einen gegebenen Anfangswert  $(t_0, y_0)$  ist  $c = F(t_0, y_0) = t_0^2 + y_0^2$  zu setzen und das Vorzeichen von  $y$  gleich dem von  $y_0$  zu wählen.

### Die Integrabilitätsbedingungen

Zu exakten Differentialgleichungen ergeben sich nun zwei Fragen.

1. Wie kann man an  $P$  und  $Q$  ablesen, ob die DGL

$$P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y' = 0 \tag{29}$$

exakt ist?

2. Wenn (29) exakt ist: Wie kann man ein Potential  $F$  von  $(P, Q)$  bestimmen?

**Satz 5.6.** Seien  $P, Q: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar und die DGL (29) exakt auf  $U$ . Dann gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\partial_2 P(t, y) = \partial_1 Q(t, y) \quad \text{für alle } (t, y) \in U.$$

In dem Fall gilt für jede (stückweise) stetig differenzierbare Kurve  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow U$  und jedes Potential  $F$  von  $(P, Q)$ :

$$F(\gamma(\beta)) = F(\gamma(\alpha)) + \int_{\alpha}^{\beta} (P(\gamma(s))\gamma'_1(s) + Q(\gamma(s))\gamma'_2(s)) ds. \tag{30}$$

Insbesondere ist  $F$  auf jeder Zusammenhangskomponente von  $U$  bis auf eine additive Konstante eindeutig durch  $(P, Q)$  bestimmt.

*Beweis.* Ist  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  ein Potential von  $(P, Q)$ , so sind

$$\partial_2 P(t, y) = \partial_2 \partial_1 F(t, y) \quad \text{und} \quad \partial_1 Q(t, y) = \partial_1 \partial_2 F(t, y)$$

gleich nach dem Satz von Schwarz aus Analysis II. Ferner gilt (vgl. Beweis von Lemma 5.1):

$$\begin{aligned} F(\gamma(\beta)) &= F(\gamma(\alpha)) + \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \gamma)'(s) ds \\ &= F(\gamma(\alpha)) + \int_{\alpha}^{\beta} \left( \underbrace{\partial_1 F(\gamma(s))}_{=P} \gamma'_1(s) + \underbrace{\partial_2 F(\gamma(s))}_{=Q} \gamma'_2(s) \right) ds. \quad \square \end{aligned}$$

Wir zeigen nun gleich, dass wenn  $U$  bestimmte Voraussetzungen erfüllt, auch die Umkehrung stimmt, und verwenden (30) als Hinweis darauf, wie man ein Potential  $F$  mit Hilfe von  $P$  und  $Q$  definieren kann. Zum Beweis müssen wir unter einem Integralzeichen differenzieren. Dazu benutzen wir folgendes Lemma (aus Analysis II).

**Lemma 5.7.** Sei  $h: (a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $H(t) = \int_c^d h(t, z) dz$  für  $t \in (a, b)$ . Dann ist  $H$  stetig differenzierbar und  $H'(t) = \int_c^d \partial_1 h(t, z) dz$ .

**Satz 5.8.** Sei  $U = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$  (ein offenes Rechteck),  $(t_0, y_0) \in U$  und seien  $P, Q: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar mit  $\partial_2 P = \partial_1 Q$ . Dann ist die DGL

$$P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y' = 0$$

exakt und ein Potential  $F$  für  $(P, Q)$  ist gegeben durch

$$F(t, y) = \int_{t_0}^t P(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y Q(t, z) dz.$$

*Beweis von Satz 5.8.* Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und dem vorigen Lemma gilt

$$\partial_1 F(t, y) = P(t, y_0) + \underbrace{\int_{y_0}^y \partial_1 Q(t, z) dz}_{=\partial_2 P(t, z)} = P(t, y_0) + [P(t, z)]_{z=y_0}^{z=y} = P(t, y)$$

und  $\partial_2 F(t, y) = Q(t, y)$ . □

**Bemerkung 5.9.**

- (i) Zur Berechnung eines Potentials nach der obigen Formel kann  $(t_0, y_0) \in U$  beliebig gewählt werden; je nach Wahl können die Integrale einfacher oder schwerer zu berechnen sein.
- (ii) Wie schon angedeutet heißt die Gleichung  $\partial_2 P = \partial_1 Q$  *Integrabilitätsbedingung*.

**Beispiel 5.10.** Die DGL

$$3t^2(y^2 + 1) + 2t^3yy' = 0$$

ist exakt auf ganz  $\mathbb{R}^2$ : Schreiben wir sie in der Form

$$P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y' = 0 \quad \text{mit} \quad P(t, y) = 3t^2(y^2 + 1) \quad \text{und} \quad Q(t, y) = 2t^3y,$$

so sehen wir

$$\partial_2 P(t, y) = 6t^2y = \partial_1 Q(t, y).$$

Wir berechnen ein Potential mit Satz 5.8 mit dem Startpunkt  $(0, 0)$ :

$$F(t, y) = \int_0^t P(s, 0) ds + \int_0^y Q(t, z) dz = \int_0^t 3s^2 ds + \int_0^y 2t^3 z dz = t^3 + t^3 y^2 = t^3(y^2 + 1).$$

Zur Probe (besonders in einer Klausur) bietet es sich an, nach der Berechnung von  $F$  noch einmal die Gleichungen  $\partial_1 F = P$  und  $\partial_2 F = Q$  zu überprüfen.

Als nächste Anwendung betrachten wir Differentialgleichungen mit getrennten Variablen:

**Beispiel 5.11.** Wir betrachten ein AWP der Form

$$y' = \frac{g(t)}{h(y(t))} \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0,$$

wobei  $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar sind,  $(t_0, y_0) \in U := (a, b) \times (c, d)$  und  $h(z) \neq 0$  für alle  $z \in (c, d)$ . Schreiben wir die DGL in der äquivalenten Form

$$0 = g(t) - h(y(t))y' = P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y' \quad \text{mit} \quad \begin{cases} P(t, z) = g(t), \\ Q(t, z) = -h(z), \end{cases}$$

so erhalten wir eine exakte DGL, weil

$$\partial_2 P(t, z) = 0 = \partial_1 Q(t, z)$$

für alle  $(t, z) \in U$ . Ein Potential ist nach dem vorigen Satz gegeben durch

$$F(t, y) = \int_{t_0}^t P(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y Q(t, z) dz = \underbrace{\int_{t_0}^t g(s) ds}_{=: G(t)} - \underbrace{\int_{y_0}^y h(z) dz}_{=: H(y)}.$$

Eine Lösung des AWP erhält man also durch Auflösung der Gleichung

$$G(t) - H(y(t)) = F(t, y(t)) = F(t_0, y_0) = 0, \quad \text{also} \quad G(t) = H(y(t)),$$

nach  $y(t)$ , genau wie im Satz zur Trennung der Variablen (Satz 2.6).

### Eulersche Multiplikatoren

Sei  $U = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$  ein offenes Rechteck. Ist eine DGL der Form

$$P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y' = 0$$

mit  $P, Q: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar nicht exakt, so kann man sie manchmal durch Multiplikation mit einer Funktion  $M: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $M(t, y) \neq 0$  für alle  $(t, y) \in U$  exakt machen. Nach den Sätzen 5.6 und 5.8 ist die erhaltene DGL

$$M(t, y(t))P(t, y(t)) + M(t, y(t))Q(t, y(t))y' = 0$$

genau dann exakt, wenn für alle  $(t, y) \in U$  gilt:

$$(\partial_2 M(t, y))P(t, y) + M(t, y)(\partial_2 P(t, y)) = (\partial_1 M(t, y))Q(t, y) + M(t, y)(\partial_1 Q(t, y)).$$

Ist dies der Fall, so nennt man  $M$  einen *Eulerschen Multiplikator*. Es ist implizit, dass die Funktion  $M$  stetig partiell differenzierbar ist.

Um  $M$  zu bestimmen, muss eine partielle DGL gelöst werden, die nicht unbedingt einfacher ist als die gewöhnliche DGL, die man ursprünglich lösen wollte.



## Teil II

# Systeme von DGL erster Ordnung

## 6 Systeme von DGL erster Ordnung – Vorbemerkungen

Wir gehen nun von skalaren DGL erster Ordnung über zu Systemen von expliziten DGL erster Ordnung der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Wir fassen die Funktionen  $y_i$  und die Funktionen  $f_i$  zu vektorwertigen Funktionen

$$\mathbb{R} \ni t \xrightarrow{y} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^{n+1} \ni (t, z_1, \dots, z_n) \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} f_1(t, z_1, \dots, z_n) \\ \vdots \\ f_n(t, z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

zusammen und schreiben das System kompakt als vektorwertige DGL

$$y' = f(t, y).$$

Eine Anfangsbedingung hat dann die Form  $y(t_0) = y_0$  mit  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Wir betrachten jetzt folgendes Anfangswertproblem:

$$y' = f(t, y) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0. \tag{31}$$

Satz 4.8 und sein Beweis können mutatis mutandis für AWP der Form (31) formuliert und geführt werden. Unter Voraussetzung einer Lipschitzbedingung bezüglich  $y = (y_1, \dots, y_n)$  erhalten wir Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für das AWP (31):

**Satz 6.1** (Picard-Lindelöf). *Sei das AWP (31) gegeben. Seien  $a, b > 0$ , sei  $Q_{a,b}$  der kompakte Quader in  $\mathbb{R}^{n+1}$  gegeben durch*

$$Q_{a,b} = \{(t, y) = (t, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \leq a, \|y - y_0\|_\infty \leq b\}$$

*und sei  $f: Q_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Die Funktion  $f$  erfülle eine Lipschitz-Bedingung bezüglich  $y$ , d.h. es existiert ein  $L \geq 0$ , sodass*

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\|_\infty \leq L \|y - \tilde{y}\|_\infty \quad \text{für alle } (t, y), (t, \tilde{y}) \in Q_{a,b}.$$

*Dann existiert genau eine Lösung  $y$  des AWP (31) auf dem Intervall  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , wobei*

$$\alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad \text{und} \quad M := \max \{ \|f(t, y)\|_\infty \mid (t, y) \in Q_{a,b} \}.$$

Definiert man für  $i = 1, \dots, n$  die Funktion  $y_{i,1}$  durch

$$y_{i,1}(t) = y_{i,0} \quad (i\text{-ter Anfangswert}),$$

dann konvergiert die Folge  $(y_{i,k})_k$ , iterativ definiert durch

$$y_{i,k+1}(t) := y_{i,0} + \int_{t_0}^t f_i(s, y_{1,k}(s), \dots, y_{n,k}(s)) ds,$$

auf dem Intervall  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  gleichmäßig gegen die  $i$ -te Komponente  $y_i$  der Lösung  $y$ .

## 7 Autonome Systeme von Differentialgleichungen

**Definition 7.1.** Ein (stetiges/differenzierbares) Vektorfeld auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  ist eine (stetige/differenzierbare) Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ein autonomes System von DGL ist ein System von DGL der Form

$$y' = f(y) \quad (32)$$

für ein Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $y: I \rightarrow U$  eine Lösung dieses Systems, so nennt man das Bild  $y(I) \subset U$  die Trajektorie von  $y$ .

Wir konzentrieren uns zunächst auf den Fall  $n = 2$  und schreiben dann (32) meist in der Form

$$\begin{aligned} x' &= g(x, y), \\ y' &= h(x, y). \end{aligned} \quad (33)$$

Solch ein System von DGL kann man gut veranschaulichen, indem man in Gitterpunkten der Ebene das Vektorfeld einzeichnet. Zeichnet man die Trajektorien von Lösungen ein, so spricht man von einem *Phasenportrait*. Diese Trajektorien verlaufen tangential zum Vektorfeld.

**Beispiel 7.2.** Für das DGL-System

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= x \end{aligned}$$

zeigt Abbildung 7 das Richtungsfeld. Lösungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos t, \\ y(t) &= r \sin t, \end{aligned}$$

wobei  $r$  eine Konstante ist. Die Lösungen verlaufen also in Kreisen um den Ursprung (mit Radius  $r$ ). Abbildung 8 zeigt das Phasenportrait.

**Beispiel 7.3.** Ein skalares, explizites AWP erster Ordnung der Form

$$y' = h(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

können wir auch als autonomes AWP mit zwei Variablen  $x$  und  $y$  auffassen:

$$\begin{aligned} x' &= 1, & x(t_0) &= t_0, \\ y' &= h(x, y), & y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Lösungen dieses Systems sind genau die Paare  $(x, y)$  mit  $x(t) = t$  und  $y'(t) = h(t, y(t))$ .

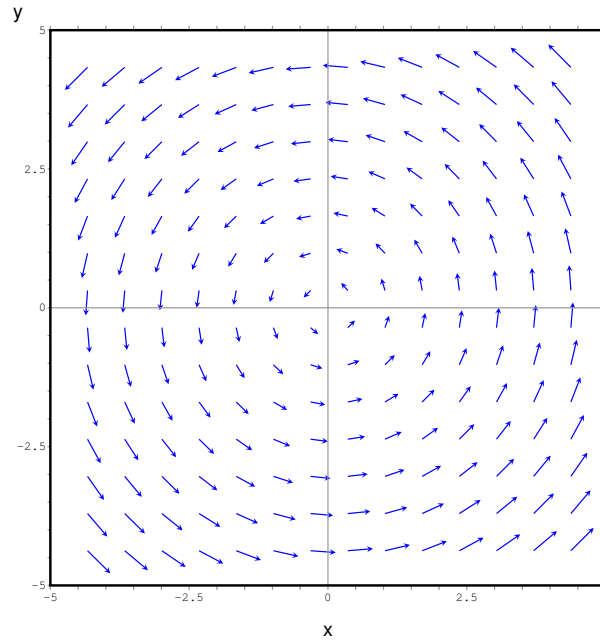


Abbildung 7: Richtungsfeld zu  $x' = -y, y' = x$

Wir knüpfen nun an die geometrischen Überlegungen zu exakten DGL an.

**Definition 7.4.** Seien  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Eine differenzierbare Funktion  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

- Hamilton-Funktion für (33), falls  $F$  ein Potential von  $(-h, g)$  ist, also

$$\partial_1 F = -h \quad \text{und} \quad \partial_2 F = g;$$

- erstes Integral für (33), falls

$$(\partial_1 F(x, y))g(x, y) + (\partial_2 F(x, y))h(x, y) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in U.$$

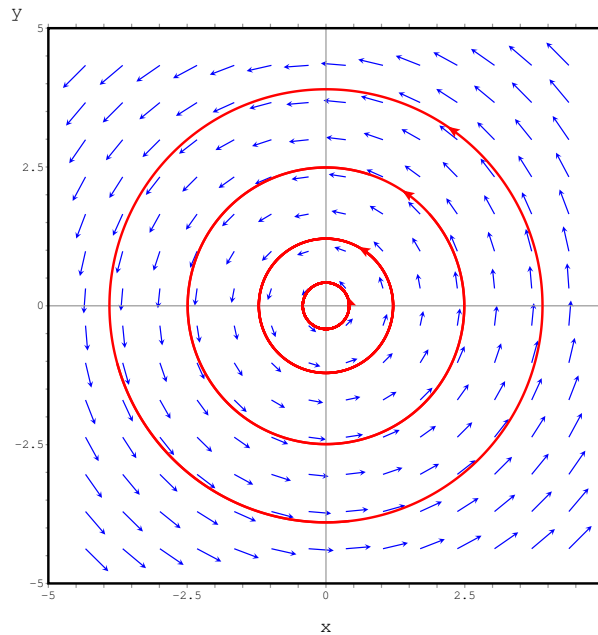
**Beispiel 7.5.** In Beispiel 7.2 definiert  $F(x, y) := -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  eine Hamilton-Funktion.

**Satz 7.6.** Seien  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

- Jede Hamilton-Funktion für (33) ist ein erstes Integral für (33).
- Ist  $F$  ein erstes Integral für (33) und  $(x, y)$  eine Lösung von (33), so ist  $F(x(t), y(t))$  konstant (als Funktion von  $t$ ).

*Beweis.* Einfach zu überprüfen. □

Lösungen verlaufen also entlang von Niveaumengen von ersten Integralen.

Abbildung 8: Phasenportrait zu  $x' = -y, y' = x$ **Bemerkung 7.7.**

- (i) In physikalischen Zusammenhängen ist meist die Gesamtenergie des betrachteten Systems ein erstes Integral. Satz 7.6.(ii) entspricht dann einem Energieerhaltungssatz.
- (ii) Für  $n > 2$  kann man erste Integrale analog definieren; für gerade  $n > 2$  auch Hamilton-Funktionen; letztere spielen in der klassischen Mechanik eine wichtige Rolle.

**Definition 7.8.** Seien  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

- Ein Gleichgewichtspunkt/stationärer Punkt für (33) ist ein  $(x_0, y_0) \in U$  mit

$$g(x_0, y_0) = 0 = h(x_0, y_0).$$

- Eine Lösung  $(x, y)$  von (33) heißt periodisch, falls  $x, y$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind und es ein  $t_0 > 0$  gibt mit

$$x(t + t_0) = x(t) \quad \text{und} \quad y(t + t_0) = y(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Gleichgewichtspunkte entsprechen offenbar genau den konstanten Lösungen von (33).

### Das mathematische Pendel

Auf ein Pendel mit Länge  $l$  und Masse  $m$  wirkt bei Auslenkung um einen Winkel  $\alpha$  gegenüber der Vertikalen in Bewegungsrichtung die Kraft  $-mg \sin(\alpha)$ , also nach dem zweiten newtonschen Gesetz ist die Winkelbeschleunigung  $\alpha''$  gleich  $-\frac{g}{l} \sin(\alpha)$ . Die Pendelbewegung wird somit durch die DGL

$$\alpha'' = -\frac{g}{l} \sin(\alpha) \quad (34)$$

beschrieben. Wir überführen diese skalare DGL zweiter Ordnung in ein autonomes System, indem wir die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega := \alpha'$$

als zweite Größe einführen: damit wird (34) äquivalent zu dem autonomen DGL-System

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega, \\ \omega' &= -\frac{g}{l} \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (35)$$

Mit Hilfe des Satzes 5.8 finden wir eine Hamilton-Funktion  $H$  für (35):

$$\begin{aligned} H(\alpha, \omega) &= \int_0^\alpha -h(s, 0) ds + \int_0^\omega g(\alpha, z) dz \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos(\alpha)). \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass dieses  $H$  eine Hamilton-Funktion für (35) definiert:

$$\partial_1 H(\alpha, \omega) = \frac{g}{l} \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \partial_2 H(\alpha, \omega) = \omega.$$

(Physikalisch stimmt diese Hamilton-Funktion mit der Gesamtenergie des Pendels überein, wenn man berücksichtigt, dass wir die DGL umgeschrieben haben. Wir haben zum Beispiel durch  $m$  und  $l$  geteilt.)

Für jede Lösung  $(\alpha, \omega)$  des Systems (35) ist also

$$H(\alpha(t), \omega(t)) = H(\alpha(t), \alpha'(t)) = \frac{\alpha'(t)^2}{2} + \frac{g}{l} (1 - \cos(\alpha(t)))$$

gleich einer Konstante  $c \in \mathbb{R}$  und dann gilt:

$$\alpha'(t) = \pm \sqrt{2 \left( c - \frac{g}{l} (1 - \cos(\alpha(t))) \right)}.$$

Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen, zu deren Lösung man eine Stammfunktion von

$$\alpha \mapsto \frac{1}{\sqrt{2(c - \frac{g}{l}(1 - \cos(\alpha)))}}$$

bestimmen müsste; diese Funktion ist aber nicht elementar integrierbar. Aufschluss über das Lösungsverhalten bietet aber das Phasenportrait (Abb. 9):

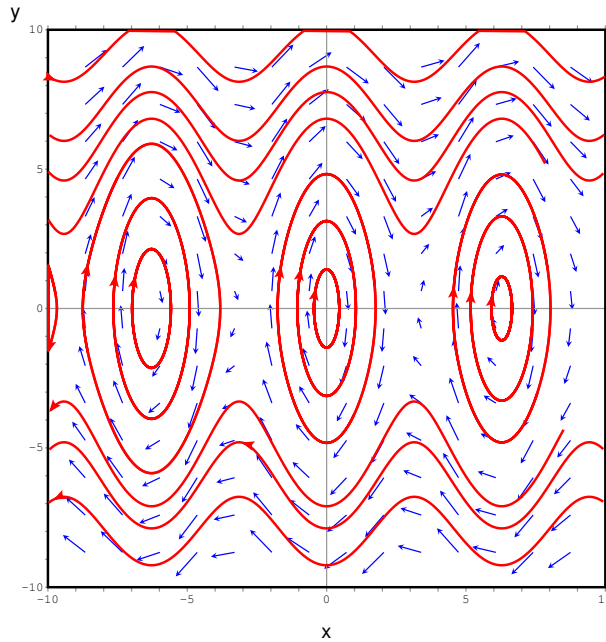


Abbildung 9: Phasenportrait zum physikalischen Pendel ( $x, y$  stehen für  $\alpha, \omega$ )

- (i) Zunächst beschreiben  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\alpha + 2k\pi$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  denselben Winkel; deswegen ist das Phasenportrait periodisch bezüglich der  $\alpha$ -Achse.
- (ii) *Gleichgewichtspunkte*: Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  ist der Punkt  $(k\pi, 0)$  ein Gleichgewichtspunkt (Ruhelage). Bei geradem  $k$  hängt das Pendel nach unten und bei ungeradem  $k$  steht es auf dem Kopf.
- (iii) *Periodische Lösungen*: Die Lösungskurve  $(\alpha, \omega)$  zu einem Startwert  $(\alpha_0, \omega_0)$  mit
  - (a) “kleiner” Anfangsgeschwindigkeit  $\omega_0$  verläuft periodisch, wobei  $\omega$  das Vorzeichen wechselt und das Pendel hin und her schwingt;
  - (b) “großer” Anfangsgeschwindigkeit  $\omega_0$  verläuft nicht periodisch; hier schwankt  $\omega$ , ohne das Vorzeichen zu wechseln, und  $\alpha$  wächst oder sinkt monoton – dabei überschlägt sich das Pendel also fortlaufend.

Genauer sehen wir:

$$\begin{aligned}
 (\alpha, \omega) \text{ ist periodisch} &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } t \in \mathbb{R} \text{ mit } \omega(t) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } t \in \mathbb{R} \text{ mit } \underbrace{H(\alpha, \omega)}_{=H(\alpha_0, \omega_0)} = \frac{g}{l}(1 - \cos(\alpha(t))) \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq H(\alpha_0, \omega_0) \leq 2\frac{g}{l}.
 \end{aligned}$$

Fall (a) tritt ein, wenn  $H(\alpha_0, \omega_0) < 2\frac{g}{l}$ , und Fall (b), wenn  $H(\alpha_0, \omega_0) > 2\frac{g}{l}$ .

**Räuber-Beute-Modell von Volterra-Lotka**

**Das Modell** Wir betrachten eine Räuber-Population und eine Beute-Population, bezeichnen deren Größe zum Zeitpunkt  $t$  jeweils mit  $x(t)$  (Beute) beziehungsweise  $y(t)$  (Räuber), und suchen ein einfaches Modell für deren gemeinsame zeitliche Entwicklung, das folgende Zusammenhänge erfasst:

- (i) Betrachten wir die Beute-Population ohne Räuber, so wächst sie proportional zu ihrer Größe (wie bei dem Bakterienmodell).
- (ii) Betrachten wir die Räuber-Population ohne Beute, so schrumpft sie proportional zu ihrer Größe (wie bei dem Bakterienmodell mit negativem Vorzeichen).
- (iii) Interaktionen zwischen Beute und Räubern bedeuten eine Schrumpfung der Beute und Zuwachs der Räuber.

Das entsprechende Modell stammt von Volterra und Lotka und besteht aus zwei “gekoppelten” Differentialgleichungen beziehungsweise einem Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy = x(a - by), \\y' &= -cy + dxy = y(dx - c),\end{aligned}\tag{36}$$

wobei  $a, b, c, d > 0$ . Wir können dieses System nicht explizit lösen, aber einige qualitative Aussagen über die Lösungen machen.

**Verlauf der Trajektorien** Im uns interessierenden Fall, dass  $x(t) > 0$  und  $y(t) > 0$ , erhalten wir aus (36):

$$x'(t) \geq 0 \Leftrightarrow y(t) \leq \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow x(t) \geq \frac{c}{d}.$$

Interessanterweise hängt die Entwicklung einer Population qualitativ (im Vorzeichen) jeweils nur von der Größe der anderen Population ab.

- (i) Der einzige nicht-triviale Gleichgewichtspunkt (und die einzige konstante Lösung) ist

$$\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right).$$

Insbesondere hängt die Lage des Gleichgewichts einer Population nur von den Koeffizienten ab, die das Wachstum der anderen Population beschreiben.

Eine praktische Folgerung: Zur Bekämpfung von Schädlingen, die natürliche Feinde haben, kann man

- sich von einem schwachen Gift nur wenig Wirkung erhoffen – dies beeinflusst die natürlichen Feinde,
- ein starkes Gift einsetzen, das die Schädlingspopulation auf Größe 0 bringt – mit womöglich nicht vertretbaren Nebenwirkungen,



- die natürlichen Feinde stärken, also deren Wachstumskoeffizienten günstig beeinflussen, um die Gleichgewichtsgröße der Schädlingspopulation zu verringern.
- (ii) Alle anderen Lösungen verlaufen oszillierend, wobei die Größen der Räuber- und der Beute-Population versetzt zueinander schwanken:
- Ist  $x(t) > \frac{c}{d}$  und  $y(t) > \frac{a}{b}$ , so wachsen die Räuber und dezimieren die Beute, bis diese unter  $\frac{c}{d}$  fällt;
  - Ist  $x(t) < \frac{c}{d}$  und  $y(t) > \frac{a}{b}$ , so finden die Räuber zu wenig Beute und schrumpfen, bis sie unter  $\frac{a}{b}$  fallen;
  - Ist  $x(t) < \frac{c}{d}$  und  $y(t) < \frac{a}{b}$ , so erholt sich die Beute und wächst, bis sie über  $\frac{c}{d}$  steigt;
  - Ist  $x(t) > \frac{c}{d}$  und  $y(t) < \frac{a}{b}$ , so finden die Räuber genug Beute und wachsen, bis sie über  $\frac{a}{b}$  steigen.

Genauer kann man zeigen:

- (iii) Durch jeden Punkt im positiven Quadranten verläuft eine periodische Lösung  $(x, y)$ , die also  $x(t + t_1) = x(t)$  und  $y(t + t_1) = y(t)$  für eine Periodendauer  $t_1 > 0$  und alle  $t \in \mathbb{R}$  erfüllt.
- (iv) Für jede solche Lösung ist der zeitliche Mittelwert der Gleichgewichtspunkt, also

$$\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} x(s) ds = \frac{c}{d} \quad \text{und} \quad \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} y(s) ds = \frac{a}{b};$$

siehe Übungen.

**Ein erstes Integral** Ist  $x'(t_0) \neq 0$  für ein  $t_0$ , so kann man die Funktion  $x$  auf einer Umgebung von  $t_0$  umkehren und die Größe der Räuber-Population als Funktion von der Größe der Beute-Population auffassen. Kurz zusammengefasst erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad \text{mit} \quad g(x) = -\frac{c}{x} + d, \quad h(y) = \frac{a}{y} - b. \quad (37)$$

Dies ist eine skalare DGL mit getrennten Variablen. Stammfunktionen zu  $g$  und  $h$  sind gegeben durch

$$G(x) = -c \ln x + dx \quad \text{bzw.} \quad H(y) = a \ln y - by.$$

Folglich existiert für jede Lösung  $y$  der DGL (37) ein  $C \in \mathbb{R}$ , sodass lokal für alle  $x$  gilt:

$$H(y(x)) + C = G(x),$$

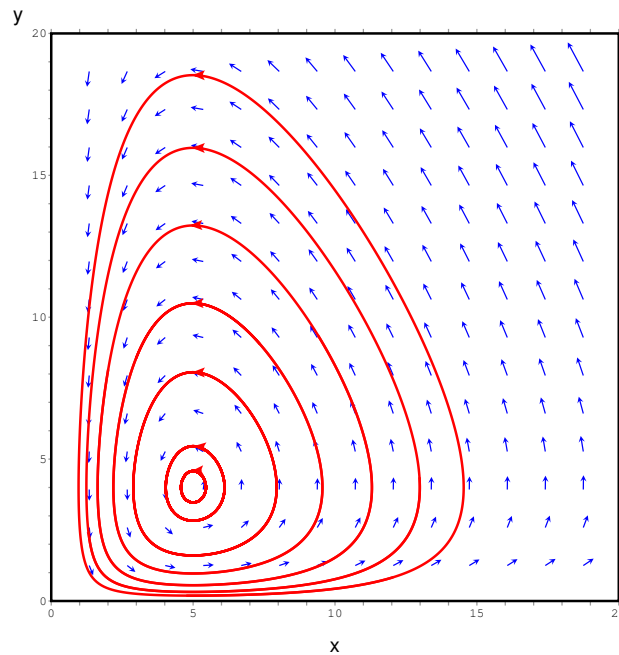


Abbildung 10: Phasenportrait des Räuber-Beute-Modells (36)

beziehungsweise

$$F(x, y(x)) := H(y(x)) - G(x) = a \ln y(x) - by(x) + c \ln x - dx = C.$$

Folglich ist für jede Lösung  $(x, y)$  der Volterra-Lotka-Gleichung mit  $x'(t) \neq 0$  und  $x(t), y(t) > 0$  auch  $F(x(t), y(t))$  konstant (als Funktion von  $t$ ). Mit anderen Worten:

**Satz 7.9.** Die Funktion  $F$  definiert durch  $F(x, y) := a \ln y - by + c \ln x - dx$  ist ein erstes Integral für (36).

*Beweis.* Statt die Herleitung rückwärts durchzugehen, kann man einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned} (\partial_1 F(x, y))g(x, y) + (\partial_2 F(x, y))h(x, y) &= \left(\frac{c}{x} - d\right)x(a - by) + \left(\frac{a}{y} - b\right)y(dx - c) \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

## 8 Lineare Systeme von DGL mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten nun besonders einfache autonome DGL-Systeme der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$y' = Ay \tag{38}$$

mit  $y = (y_1, \dots, y_n)$  und einer Matrix  $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ .

**Beispiel 8.1.** Ist  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$  eine Diagonalmatrix, so wird aus (38)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix},$$

und die Lösung  $y$  hat nach Beispiel 1.3 die Form

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} y_1(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} y_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} y(0).$$

### Die Matrixexponentialfunktion

Wir wollen zeigen, dass – ähnlich wie im skalaren Fall – die allgemeine Lösung von (38) die Form

$$y(t) = e^{At} y(0)$$

besitzt. Dabei wollen wir die Exponentialfunktion für eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  mit Hilfe der Potenzreihe definieren als

$$e^A = \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{K \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^K \frac{A^k}{k!}}_{=: S_K},$$

und müssen zeigen, dass die Folge  $(S_K)_K$  der Partialsummen konvergiert, konkret komponentenweise beziehungsweise abstrakter bezüglich einer geeigneten Norm auf dem Vektorraum  $M_n(\mathbb{R})$  (vgl. Definitionen 4.1 und 4.3). Da der Vektorraum  $M_n(\mathbb{R})$  endliche Dimension ( $n^2$ ) hat, sind alle Normen auf  $M_n(\mathbb{R})$  äquivalent (siehe Analysis II), und der Raum ist bezüglich jeder Norm vollständig. Praktisch für uns ist folgende gewichtete Supremumsnorm.

**Lemma 8.2.**

(i) Auf  $M_n(\mathbb{R})$  definiert  $\|A\| := n \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ , wobei  $A = (a_{ij})_{i, j}$ , eine Norm.

(ii) Für alle  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  gilt  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

*Beweis.* (i): Die Eigenschaften einer Norm sind leicht zu überprüfen.

(ii): Wir schreiben  $A = (a_{ij})_{i, j}$ ,  $B = (b_{ij})_{i, j}$  und  $AB = (c_{ij})_{i, j}$ . Dann folgt

$$|c_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{|a_{ik}|}_{\leq \frac{\|A\|}{n}} \underbrace{|b_{kj}|}_{\leq \frac{\|B\|}{n}} \leq n \frac{\|A\|}{n} \frac{\|B\|}{n}$$

und somit  $\|AB\| = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |c_{ij}| \leq \|A\| \|B\|$ . □

**Proposition 8.3.** Für jede Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  konvergiert die Folge der Partialsummen

$$S_K := \sum_{k=0}^K \frac{A^k}{k!}$$

(absolut) bezüglich der Norm  $\|\cdot\|$ .

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $(S_K)_K$  bezüglich  $\|\cdot\|$  eine Cauchy-Folge ist: Für  $N > M$  ist

$$\begin{aligned} \|S_N - S_M\| &= \left\| \sum_{k=M+1}^N \frac{A^k}{k!} \right\| \\ &\leq \sum_{k=M+1}^N \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| && \text{(Subadditivität der Norm)} \\ &\leq \sum_{k=M+1}^N \frac{\|A\|^k}{k!} && \text{(Submultiplikativität, Lemma 8.2 2.)} \\ &\xrightarrow{N > M \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

weil die Reihe  $e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$  konvergiert. Da  $M_n(\mathbb{R})$  bezüglich  $\|\cdot\|$  vollständig ist, ist damit die Proposition bewiesen. □

**Definition 8.4.** Für jede Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  definieren wir

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} := \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K \frac{A^k}{k!}.$$

**Bemerkung 8.5.** Sei  $(A_k)_k$  eine Folge in  $M_n(\mathbb{R})$  und  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Schreiben wir  $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j}$  und  $A = (a_{ij})_{i,j}$ , dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $A_k \rightarrow A$  bezüglich  $\|\cdot\|$ .
- (ii) Für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gilt:  $a_{ij}^{(k)} \rightarrow a_{ij}$ , d.h. die Folge  $(A_k)_k$  von Matrizen konvergiert komponentenweise gegen  $A$ .

**Beispiel 8.6.** Sei  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$  eine Diagonalmatrix. Für jedes  $k \geq 1$  gilt  $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ , also

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 8.7** (Harmonischer Oszillator). Wir betrachten die DGL  $\alpha'' = -\chi \sin \alpha$  (mit  $\chi > 0$ ) des mathematischen Pendels. Für kleine Auslenkungen  $|\alpha|$  kann man  $\sin \alpha$  durch  $\alpha$  annähern, die DGL also durch  $\alpha'' = -\chi \alpha$  ersetzen, und erhält damit den *harmonischen Oszillator*. Mit  $\omega := \alpha'$  ist diese DGL äquivalent zum System

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha' \\ \omega' \end{pmatrix}}_{=:y'} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\chi \alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\chi & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \end{pmatrix}}_{=:y}.$$

Hier wird

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\chi & 0 \\ 0 & -\chi \end{pmatrix}, \quad A^{2k} = \begin{pmatrix} (-\chi)^k & 0 \\ 0 & (-\chi)^k \end{pmatrix}, \quad A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-\chi)^k \\ (-\chi)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(-\chi)^k t^{2k}}{(2k)!} & \frac{(-\chi)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \frac{(-\chi)^{k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \frac{(-\chi)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\chi} t & \frac{1}{\sqrt{\chi}} \sin \sqrt{\chi} t \\ -\sqrt{\chi} \sin \sqrt{\chi} t & \cos \sqrt{\chi} t \end{pmatrix},$$

wobei wir folgende Potenzreihen des Kosinus und Sinus für  $\phi = \sqrt{\chi} t$  verwendet haben:

$$\cos \phi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin \phi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Wir setzen nun

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} := e^{At} \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \omega(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(0) \cos \sqrt{\chi} t + \omega(0) \frac{1}{\sqrt{\chi}} \sin \sqrt{\chi} t \\ -\alpha(0) \sqrt{\chi} \sin \sqrt{\chi} t + \omega(0) \cos \sqrt{\chi} t \end{pmatrix}$$

und erhalten damit eine Lösung unseres Systems von DGL, denn für jedes  $t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\alpha'(t) = \omega(t) \quad \text{und} \quad \alpha''(t) = \omega'(t) = -\alpha(0)\chi \cos \sqrt{\chi}t - \omega(0)\sqrt{\chi} \sin \sqrt{\chi}t = -\chi\alpha(t).$$

Nun wollen wir allgemein zeigen, dass das System  $y' = Ay$  die Lösung  $y$  gegeben durch  $y(t) = e^{At}y(0)$  besitzt, und müssen dazu die matrixwertige Funktion  $t \mapsto e^{At}$  ableiten.

**Lemma 8.8.** *Erfüllen  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  die Relation  $AB = BA$ , so gilt  $e^{A+B} = e^A e^B$ .*

*Beweis.* Der Beweis kann ähnlich wie für den Fall  $A, B \in \mathbb{R}$  geführt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} e^{(A+B)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \underbrace{\frac{1}{k!} \binom{k}{l}}_{\frac{1}{l!(k-l)!}} A^l B^{k-l} \stackrel{(2)}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} = e^A e^B, \end{aligned}$$

wobei im Schritt (1) die binomische Formel für Matrizen und die Annahme  $AB = BA$  verwendet wurde, und im Schritt (2) ein Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen von Matrizen, den wir nicht genauer ausführen.  $\square$

**Folgerung 8.9.** *Insbesondere ist  $e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I_n$  die Einheitsmatrix, also ist  $e^A$  für jede Matrix  $A \in M_n(\mathbb{R})$  invertierbar mit  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .*

**Satz 8.10.** *Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ ,  $t \mapsto e^{At}$ , erfüllt die Gleichung*

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{39}$$

*Beweis.* Wir schreiben  $I_n$  für die  $n \times n$ -Einheitsmatrix. Für  $t = 0$  und  $|h| < 1$  folgt mit der Subadditivität und Submultiplikativität der Norm:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{e^{Ah} - e^{A0}}{h} - A \right\| &= \frac{1}{|h|} \|e^{Ah} - I_n - Ah\| \\ &= \frac{1}{|h|} \left\| I_n + \frac{Ah}{1!} + \frac{(Ah)^2}{2!} + \dots - I_n - Ah \right\| \\ &\leq \frac{\|A\|^2 |h|}{2!} + \frac{\|A\|^3 |h|^2}{3!} + \dots \\ &\leq |h| e^{\|A\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

also gilt (39) für  $t = 0$ . Für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  folgt nach dem obigen Lemma

$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \frac{e^{Ah} - I_n}{h} e^{At} \xrightarrow{h \rightarrow 0} A e^{At}. \quad \square$$

**Satz 8.11** (Lösung linearer Systeme von DGL mit konstanten Koeffizienten). *Seien  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann hat das AWP*

$$y' = Ay, \quad y(t_0) = y_0$$

die eindeutige Lösung  $y$  definiert durch

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Die Funktion  $y$  definiert durch  $y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0$  erfüllt  $y(t_0) = e^{A \cdot 0}y_0 = I_n y_0 = y_0$  und nach dem vorigen Satz auch

$$y'(t) = \left( \frac{d}{dt} e^{A(t-t_0)} \right) y_0 = A e^{A(t-t_0)} y_0 = Ay(t)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Ist  $z$  eine weitere Lösung, so erfüllt die Funktion  $v$  definiert durch  $v(t) := e^{-At}z(t)$  nach der Produktregel

$$v'(t) = -Ae^{-At}z(t) + e^{-At}z'(t) = -Ae^{-At}z(t) + e^{-At}Az(t) = 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R},$$

also  $v$  ist konstant. Folglich gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$ , dass  $e^{-At}z(t) = e^{-At_0}z(t_0) = e^{-At_0}y_0$ , also  $z(t) = e^{A(t-t_0)}y_0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . □

Als nächstes wollen wir betrachten, wie man  $e^{At}$  berechnen kann.

### Lösung mittels Eigenwerttheorie

Wir haben mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion die Lösungen eines Systems der Form

$$y' = Ay \text{ mit } A \in M_n(\mathbb{R}) \tag{40}$$

in der Form

$$y(t) = e^{At}y(0)$$

angegeben. In dieser Form sagt uns das nicht sehr viel – zum Beispiel können wir nicht direkt ablesen, ob die Lösungen mit der Zeit wachsen/oszillieren/schrumpfen. Wir beschreiben nun die Lösungen konkreter mit Hilfe von Eigenwerten und -vektoren, und wiederholen dazu grundlegende Begriffe aus der linearen Algebra. Da wurde definiert und gezeigt:

- $\lambda \in \mathbb{C}$  ist *Eigenwert* von  $A$   $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$  Es gibt ein  $v \in \mathbb{C}^n$  mit  $v \neq 0$  und  $Av = \lambda v$ .  
(Ein solches  $v$  heißt *Eigenvektor* von  $A$ .)
- $\Leftrightarrow$  Es gibt ein  $v \in \mathbb{C}^n$  mit  $v \neq 0$  und  $(A - \lambda I_n)v = 0$ .
- $\Leftrightarrow$   $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$ .
- $\Leftrightarrow$  Die Matrix  $A - \lambda I_n$  ist nicht invertierbar.
- $\Leftrightarrow$   $\det(A - \lambda I_n) = 0$ .
- $\Leftrightarrow$   $\lambda$  ist eine Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*  $\chi_A(t) = \det(A - tI_n)$ .

**Reelle Eigenwerte** Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten liefern reelle Lösungen:

**Satz 8.12.** Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  und sei  $v \in \mathbb{R}^n$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann definiert  $y(t) := e^{\lambda t}v$  eine Lösung des Systems  $y' = Ay$ .

*Beweis.* Für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt  $Ay(t) = Ae^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av = e^{\lambda t}\lambda v = y'(t)$ .  $\square$

Folglich wachsen die Lösungen im Fall  $\lambda > 0$  bzw. konvergieren gegen 0 im Fall  $\lambda < 0$ .

**Komplexe Eigenwerte** Für ein  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  bezeichnet  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  die *komplex konjugierte Zahl*. Für  $w = (w_j)_j \in \mathbb{C}^n$  und  $B = (b_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$  setzen wir  $\bar{w} = (\bar{w}_j)_j$  und  $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})_{i,j}$ . Da  $\overline{\lambda\mu} = \bar{\lambda}\bar{\mu}$  für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , gilt auch  $\overline{\lambda w} = \bar{\lambda}\bar{w}$ , und  $\overline{Bw} = \bar{B}\bar{w}$ .

Eigenvektoren zu komplexen Eigenwerten liefern Paare reeller Lösungen.

**Satz 8.13.** Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  und sei  $w = u + iv \in \mathbb{C}^n$  (mit  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ) ein komplexer Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  (mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). Dann sind

- (i)  $\bar{w}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\bar{\lambda}$ ;
- (ii)  $y(t) := e^{\lambda t}w$  und  $\bar{y}(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{w}$  komplexwertige Lösungen von (40);
- (iii)  $y_{\text{Re}}(t) := \text{Re } y(t) = \text{Re } \bar{y}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v)$  und  $y_{\text{Im}}(t) := \text{Im } y(t) = -\text{Im } \bar{y}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u)$  reelle Lösungen von (40).

*Beweis.* (i): Da  $A$  reell ist, gilt  $A\bar{w} = \overline{Aw} = \bar{\lambda}\bar{w} = \bar{\lambda}\bar{w}$ .

(ii): Das folgt wie der Satz 8.12.

(iii): Für  $t \in \mathbb{R}$  gilt:  $y'_{\text{Re}}(t) = \text{Re } y'(t) = \text{Re}(Ay(t)) = A \text{Re } y(t) = Ay_{\text{Re}}(t)$  und analog  $y'_{\text{Im}}(t) = Ay_{\text{Im}}(t)$ .  $\square$

Folglich oszillieren die Lösungen im Fall  $\beta \neq 0$ , wachsen in Norm im Fall  $\alpha > 0$  bzw. konvergieren gegen 0 im Fall  $\alpha < 0$ .

**Diagonalisierbarer Fall** Unter welchen Bedingungen können wir die allgemeine Lösung des Systems  $y' = Ay$  von DGL mit Hilfe der oben gefundenen speziellen Lösungen darstellen? Offenbar muss es dazu "genug" Eigenvektoren geben.

**Definition 8.14.** (i) Zwei Matrizen  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix  $S \in M_n(\mathbb{C})$  mit  $A = SBS^{-1}$  bzw.  $AS = SB$  gibt.

(ii) Eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{C})$  heißt *diagonalisierbar*, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist, also es existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  mit

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S^{-1} \quad (41)$$

für eine invertierbare Matrix  $S$ .



Mit diagonalisierbaren Matrizen kann man besonders gut rechnen: Aus (41) folgt

$$A^2 = S \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} S^{-1}, \quad \dots, \quad A^k = S \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1}.$$

**Satz 8.15.** Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  diagonalisierbar wie in (41). Dann gilt

$$e^{At} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

*Beweis.* Nach der Vorbemerkung gilt für jedes  $K$

$$\sum_{k=0}^K \frac{A^k t^k}{k!} = S \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^K \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^K \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Lassen wir  $K$  gegen unendlich gehen, so folgt die Behauptung.  $\square$

Wann ist nun eine Matrix diagonalisierbar?

**Satz 8.16.** Eine Matrix  $A \in M_n(\mathbb{C})$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$  gibt.

*Beweis. Vorüberlegung:* Sei  $S$  eine Matrix mit Spalten  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$  und sei  $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$  eine Diagonalmatrix. Dann ist

$$AS = (Av_1 \ \dots \ Av_n) \quad \text{und} \quad SB = (\lambda_1 v_1 \ \dots \ \lambda_n v_n). \quad (42)$$

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$  zu Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann ist  $S := (v_1 \ \dots \ v_n) \in M_n(\mathbb{C})$  invertierbar und aus (42) folgt  $AS = SB$ .

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $AS = SB$ , wobei  $S$  invertierbar ist, und schreibe  $S, B$  wie oben. Dann folgt aus (42), dass die Spalte  $v_j$  von  $S$  jeweils ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_j$  ist. Da  $S$  invertierbar ist, bilden die Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis.  $\square$

Im diagonalisierbaren Fall ist jede Lösung eine Linearkombination von Lösungen der Form aus Satz 8.12 und Satz 8.13. Wir geben gleich zwei Beweise:

**Satz 8.17.** Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  diagonalisierbar wie in (41) mit  $S = (v_1 \ \dots \ v_n)$  und sei  $y$  eine Lösung der DGL  $y' = Ay$ . Dann gibt es  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  mit

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

*Beweis. Variante 1:* Nach Satz 8.11 und Satz 8.15 ist

$$y(t) = e^{At}y(0) = \underbrace{S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} v_1 & \dots & e^{\lambda_n t} v_n \end{pmatrix}} \underbrace{S^{-1}y(0)}_{=: \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n.$$

*Variante 2:* Die Funktion  $z$  definiert durch  $z(t) = S^{-1}y(t)$  erfüllt die *entkoppelte DGL*

$$z'(t) = S^{-1}y'(t) = S^{-1}Ay(t) = S^{-1}ASS^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} z(t).$$

Es folgt

$$z(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} z_1(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} z_n(0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y(t) = Sz(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 \underbrace{z_1(0)}_{=: \alpha_1} + \dots + e^{\lambda_n t} v_n \underbrace{z_n(0)}_{=: \alpha_n}.$$

□

**Beispiel 8.18.** Wir lösen das AWP

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

*Schritt 1 - Bestimmung der Eigenwerte von A:* Wir berechnen das charakteristische Polynom von  $A$  durch Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det(A - \lambda I_3) = (2 - \lambda) ((3 - \lambda)^2 - 1) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = (2 - \lambda)^2(4 - \lambda).$$

Die Nullstellen des Polynoms und somit die Eigenwerte von  $A$  sind also

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 4.$$

*Schritt 2 - Bestimmung der Eigenräume von A:* Der Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  ist der Kern von

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang 1, der Kern hat also Dimension  $3 - 1 = 2$  und eine Basis ist beispielsweise gegeben durch die Vektoren

$$v_1 = (1 \ 1 \ 0)^\top, \quad v_2 = (1 \ 0 \ 1)^\top.$$

(Diese Basis ist natürlich nicht eindeutig.)

Der Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda_3 = 4$  ist der Kern von

$$A - 4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang 2, der Kern hat also Dimension  $3 - 2 = 1$  und wird beispielsweise aufgespannt durch den Vektor

$$v_3 = (0 \ 1 \ 1)^\top.$$

*Schritt 3 - Bestimmung der Koeffizienten aus dem Anfangswert:* Die allgemeine Lösung der DGL  $y' = Ay$  hat nach Satz 8.17 die Form

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \quad \text{mit } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Für die Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ergibt sich aus der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y(0) = \alpha_1 e^0 v_1 + \alpha_2 e^0 v_2 + \alpha_3 e^0 v_3 = (v_1 \ v_2 \ v_3) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Lösung dieses linearen Gleichungssystems, z.B. mit dem Gaußschen Algorithmus, führt zu

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}.$$

Somit ist die Lösung des AWP's (43) gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{2} \left( e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} + e^{4t} \\ e^{2t} + e^{4t} \end{pmatrix}.$$

*Probe:* Wir rechnen nach:  $y(0) = (1 \ 1 \ 1)^\top$  und

$$Ay(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2e^{2t} \\ -1 \cdot 2e^{2t} + 3(e^{2t} + e^{4t}) + 1 \cdot (e^{2t} + e^{4t}) \\ -1 \cdot 2e^{2t} + 1 \cdot (e^{2t} + e^{4t}) + 3(e^{2t} + e^{4t}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2e^{2t} \\ 2e^{2t} + 4e^{4t} \\ 2e^{2t} + 4e^{4t} \end{pmatrix} = y'(t)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

### Kompartimentmodelle

Wir betrachten  $n$  Kompartimente  $K_1, \dots, K_n$ , die zum Zeitpunkt  $t$  jeweils eine Menge  $m_1(t), \dots, m_n(t)$  eines Stoffes enthalten, der zwischen den Kompartimenten ausgetauscht wird.

Wir betrachten zunächst einen *diskreten Austausch* folgender Form: Für  $i \neq j$  werde vom Kompartiment  $K_j$  in das Kompartiment  $K_i$  pro Zeiteinheit  $\Delta t$  ein Anteil des Stoffes transportiert, der proportional zu  $m_j(t)$  und der Zeiteinheit  $\Delta t$  ist, also insgesamt die Menge

$$a_{ij} m_j(t) \Delta t \quad \text{mit einer Konstanten } a_{ij}.$$

Im Fall  $a_{ij} = 0$  findet einfach kein Transport von  $K_j$  nach  $K_i$  statt.

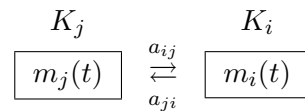


Abbildung 11: Kompartimentmodell.

Dann folgt für  $i = 1, \dots, n$  jeweils

$$\begin{aligned} m_i(t + \Delta t) &= m_i(t) + \underbrace{\sum_{j \neq i} a_{ij} m_j(t) \Delta t}_{\text{Zufluss}} - \underbrace{\sum_{j \neq i} a_{ji} m_i(t) \Delta t}_{\text{Abfluss}} \\ &= m_i(t) + \Delta t \sum_{j=1}^n a_{ij} m_j(t) \quad \text{mit } a_{ii} := - \sum_{j \neq i} a_{ji}, \end{aligned}$$

beziehungsweise in vektor- und matrixschreibweise

$$m(t + \Delta t) = m(t) + \Delta t A m(t) \quad \text{mit } A = (a_{ij})_{i,j} \quad \text{und } m(t) = (m_i(t))_i. \quad (44)$$

Wir schreiben das in der Form  $m(t + \Delta t) = (I_n + \Delta t A)m(t)$  und finden induktiv

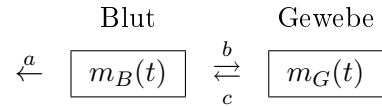
$$m(t + k\Delta t) = (I_n + \Delta t A)^k m(t) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Bei einem *kontinuierlichen Austausch* gilt eine Beziehung wie (44) im Limes für  $\Delta t \rightarrow 0$  und wir erhalten

$$m'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = Am(t), \quad (45)$$

also ein lineares System von DGL mit konstanten Koeffizienten mit der Lösung  $m$  gegeben durch  $m(t) = e^{At}m(0)$ .

**Beispiel 8.19** (Abbau eines Medikamentes). Ein einfaches Modell für den Abbau eines im Körper befindlichen Medikamentes unterstellt als wesentliche Kompartimente das Blut und das Gewebe und dazwischen einen kontinuierlichen Austausch



mit Raten  $a, b, c > 0$ , also das DGL-System

$$\begin{pmatrix} m'_B \\ m'_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b & c \\ b & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_B \\ m_G \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} -a-b & c \\ b & -c \end{pmatrix}$  hat die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = -\frac{a+b+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^2 - 4ac}.$$

Diese sind verschieden, weil

$$(a+b+c)^2 - 4ac > (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0,$$

und kleiner als Null, weil

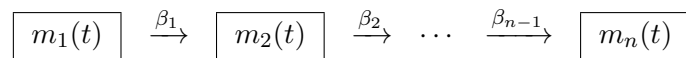
$$\sqrt{(a+b+c)^2 - 4ac} < a+b+c.$$

Man kann nun Eigenvektoren  $v_{\pm}$  zu  $\lambda_{\pm}$  berechnen und erhält als allgemeine Lösung für  $m = (m_B \ m_G)^T$ :

$$m(t) = \alpha_+ e^{\lambda_+ t} v_+ + \alpha_- e^{\lambda_- t} v_- \text{ mit } \alpha_+, \alpha_- \in \mathbb{R},$$

also sind  $m_B$  und  $m_G$  jeweils die Summe zweier exponentiell abfallender Funktionen.

**Beispiel 8.20** (Radioaktive Zerfallsreihe). Uran 238 zerfällt über 13 Zwischenstufen in stabiles Blei. Wir betrachten allgemeiner eine radioaktive Substanz, die in  $n-1$  Schritten in eine stabile Substanz zerfällt. Ist  $\beta_i$  die Zerfallskonstante der  $i$ -ten Stufe, so lässt sich der Zerfall durch ein Kompartimentmodell der Form



beschreiben bzw. durch das System

$$m' = Am \text{ mit } A = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & -\beta_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta_{n-2} & -\beta_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} > 0$ .

Die Eigenwerte von  $A$  sind die Lösungen der Gleichung

$$(\lambda + \beta_1)(\lambda + \beta_2) \cdots (\lambda + \beta_{n-1})\lambda,$$

also die Eigenwerte sind  $\lambda_i = -\beta_i$  für  $i = 1, \dots, n-1$  und  $\lambda_n = 0$ .

Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  ist der zugehörige Eigenraum  $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$  nur eindimensional, weil in der Matrix  $A - \lambda I_n$  die zweite bis zur letzten Zeile linear unabhängig sind und folglich  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I_n) = n - \text{Rang}(A - \lambda I_n) = n - (n-1) = 1$ . Sind die  $\beta_i$  paarweise verschieden, so hat  $A$   $n$  verschiedene Eigenwerte, ist also diagonalisierbar, und wir können die allgemeine Lösung beschreiben. (Andernfalls hat  $A$  weniger als  $n$  Eigenwerte und ist nach obiger Überlegung nicht mehr diagonalisierbar.)

### Zusatz: Hauptvektoren/verallgemeinerte Eigenvektoren

Wir betrachten nun kurz die DGL  $y' = Ay$  für den Fall, dass  $A \in M_n(\mathbb{C})$  nicht diagonalisierbar ist. Dieser Zusatzabschnitt ist skizzenhaft; insbesondere beschreiben wir kein vollständiges Lösungsverfahren für die Gleichung  $y' = Ay$  in dem Fall, dass  $A \in M_n(\mathbb{C})$  nicht diagonalisierbar ist.

Wir wiederholen/definieren aus der linearen Algebra:

**Definition 8.21.** Sei  $A \in M_n(\mathbb{C})$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ein  $v \in \mathbb{C}^n$  heißt Hauptvektor oder verallgemeinerter Eigenvektor von  $A$  der Stufe  $k \geq 1$  zum Eigenwert  $\lambda$ , falls  $(A - \lambda I_n)^k v = 0$  und  $(A - \lambda I_n)^{k-1} v \neq 0$ .

Wenn  $v \in \mathbb{C}^n$  ein Hauptvektor von  $A$  der Stufe  $k \geq 2$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist, dann ist  $(A - \lambda I_n)v$  ein Hauptvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  der Stufe  $k-1$ . Hauptvektoren der Stufe 1 sind genau die Eigenvektoren.

**Beispiel 8.22.** In Beispiel 8.20 erhalten wir für  $n = 3$  und  $\beta_1 = \beta_2 =: \beta > 0$  die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ \beta & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ein Hauptvektor zweiter Stufe zum Eigenwert  $-\beta$ :

$$(A + \beta I_3)^2 v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller Hauptvektoren zu einem Eigenwert  $\lambda$  zuzüglich des Nullvektors heißt der *Hauptraum* von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  und wird mit  $H_\lambda(A)$  bezeichnet, also

$$H_\lambda(A) = \left\{ v \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I_n)^k v = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

In der linearen Algebra beweist man:

**Satz 8.23** (Hauptraumzerlegung). Sei  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Dann besitzt  $\mathbb{C}^n$  eine Basis aus Hauptvektoren von  $A$ , genauer gilt

$$\mathbb{C}^n \cong \bigoplus_{\lambda} H_{\lambda}(A),$$

wobei die Summe über alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$  gebildet wird.

Jeder Hauptvektor liefert eine Lösung der DGL:

**Satz 8.24.** Sei  $v \in \mathbb{C}^n$  ein Hauptvektor von  $A$  der Stufe  $k$  zum Eigenwert  $\lambda$  und seien  $v_0 = v$ ,  $v_1 = (A - \lambda I_n)v$ ,  $\dots$ ,  $v_{k-1} = (A - \lambda I_n)^{k-1}v$ . Dann ist die Funktion  $y$  gegeben durch

$$y(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda t} v_j$$

eine (möglicherweise komplexwertige) Lösung der DGL  $y' = Ay$ .

*Beweis.* Nach Satz 8.11 ist eine Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At} v \stackrel{8.8}{=} e^{\lambda t} e^{(A - \lambda I_n)t} v \\ &= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j (A - \lambda I_n)^j}{j!} v \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda t} v_j, \quad \text{da } (A - \lambda I_n)^j v = \begin{cases} 0, & j \geq k, \\ v_j, & j < k. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Ähnlich wie zuvor erhält man nun

- mit dem Real- und dem Imaginärteil einer komplexwertigen Lösung zwei reellwertige Lösungen (vgl. Satz 8.13),
- die allgemeine Lösung des AWP's durch Linearkombination von Lösungen zu einer Basis aus Hauptvektoren (vgl. Satz 8.17).

## 9 Lineare Systeme von DGL erster Ordnung

Wir betrachten nun Systeme von DGL der Form

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{46}$$

mit einer matrixwertigen Funktion  $A$  und einer vektorwertigen Funktion  $b$ .

**Definition 9.1.** Ein lineares DGL-System erster Ordnung ist ein DGL-System der Form (46). Im Fall  $b \equiv 0$  heißt es homogen, sonst inhomogen.

### Struktur der Lösungsmenge

Eine praktische und allgemein anwendbare Lösungsmethode für lineare DGL-Systeme gibt es nicht. Mit einer Variante des Satzes von Picard-Lindelöf für DGL-Systeme kann man aber zeigen:

**Satz 9.2** (Existenz und Eindeutigkeit). Seien  $A: (\alpha, \beta) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  und  $b: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann hat das AWP

$$y' = A(t)y + b(t) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

auf  $(\alpha, \beta)$  eine eindeutige Lösung.

**Bemerkung 9.3.** Die DGL zeigt, dass dann  $y'$  (wie  $A, b$  und  $y$ ) stetig ist, dass also  $y$  stetig differenzierbar ist.

Sei  $C((\alpha, \beta); \mathbb{R}^n)$  die Menge aller stetigen vektorwertigen Funktionen  $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Diese Menge ist ein Vektorraum bezüglich der punktweise definierten Operationen

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(t) := \lambda f(t).$$

**Lemma 9.4** (Superpositionsprinzip). Sei  $A: (\alpha, \beta) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  stetig, und sei  $b = \lambda_1 b_{(1)} + \dots + \lambda_k b_{(k)}$ , mit gewissen  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  und stetigen  $b_{(j)}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Erfüllt jeweils  $y_{(j)}$  die DGL

$$y'_{(j)} = A(t)y_{(j)} + b_{(j)}(t),$$

so erfüllt  $y := \lambda_1 y_{(1)} + \dots + \lambda_k y_{(k)}$  die DGL

$$y' = A(t)y + b(t).$$

*Beweis.* Für alle  $t \in (\alpha, \beta)$  gilt:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda_1 y'_{(1)}(t) + \dots + \lambda_k y'_{(k)}(t) \\ &= \lambda_1 (A(t)y_{(1)}(t) + b_{(1)}(t)) + \dots + \lambda_k (A(t)y_{(k)}(t) + b_{(k)}(t)) \\ &= A(t)(\lambda_1 y_{(1)}(t) + \dots + \lambda_k y_{(k)}(t)) + (\lambda_1 b_{(1)}(t) + \dots + \lambda_k b_{(k)}(t)) \\ &= A(t)y(t) + b(t). \end{aligned}$$

□



Folglich bilden die Lösungen eines *homogenen* DGL-Systems einen Vektorraum:

**Satz 9.5.** Sei  $A: (\alpha, \beta) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  stetig. Dann ist die Menge

$$\mathcal{L}_h = \{y: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ differenzierbar mit } y'(t) = A(t)y(t) \text{ für alle } t \in (\alpha, \beta)\}$$

ein  $n$ -dimensionaler Untervektorraum von  $C((\alpha, \beta); \mathbb{R}^n)$ , und für jedes  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  ist die Abbildung

$$\text{ev}_{t_0}: \mathcal{L}_h \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto y(t_0), \tag{47}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

*Beweis.* Lemma 9.4, angewendet auf den Fall  $b_{(1)} \equiv \dots \equiv b_{(k)} \equiv 0$ , zeigt, dass  $\mathcal{L}_h$  ein Untervektorraum von  $C((\alpha, \beta); \mathbb{R}^n)$  ist. Die Abbildung  $\text{ev}_{t_0}$  ist offenbar linear und nach Satz 9.2 bijektiv. Folglich ist  $\dim \mathcal{L}_h = \dim \mathbb{R}^n = n$ . □

Mit den Bezeichnungen des obigen Satzes definieren wir:

**Definition 9.6.** Ein Fundamentalsystem des homogenen DGL-Systems  $y' = A(t)y$  ist eine Basis  $\{y_{(1)}, \dots, y_{(n)}\}$  von  $\mathcal{L}_h$ ; man nennt dann

$$Y: (\alpha, \beta) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad t \mapsto (y_{(1)}(t) \ \dots \ y_{(n)}(t))$$

eine Fundamentalmatrix dieser DGL.

**Bemerkung 9.7.**

1. Ist  $\{y_{(1)}, \dots, y_{(n)}\}$  ein Fundamentalsystem und  $Y$  die zugehörige Fundamentalmatrix des DGL-Systems  $y' = A(t)y$ , so gibt es für jede Lösung  $y$  eindeutig bestimmte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  mit  $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_{(i)}$ , also genau ein  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $y(t) = Y(t)v$  für alle  $t \in (\alpha, \beta)$ . Dies folgt direkt aus Satz 9.5.
2. Eine matrixwertige Funktion  $Y: (\alpha, \beta) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  ist genau dann eine Fundamentalmatrix von  $y' = A(t)y$ , wenn  $Y'(t) = A(t)Y(t)$  für alle  $t \in (\alpha, \beta)$  und wenn  $Y(t)$  für ein (und dann alle)  $t \in (\alpha, \beta)$  invertierbar ist.
3. Ist  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , so wird durch  $Y(t) := e^{At}$  eine Fundamentalmatrix für die DGL  $y' = Ay$  definiert. Dies folgt aus (2), Satz 8.10 und Folgerung 8.9.

Im *inhomogenen* Fall bilden die Lösungen einen affinen Unterraum:

**Satz 9.8.** Seien  $A: (\alpha, \beta) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  und  $b: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann ist die Menge

$$\mathcal{L} = \{y \in C((\alpha, \beta); \mathbb{R}^n) \mid y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \text{ für alle } t \in (\alpha, \beta)\}$$

ein affiner Unterraum von  $C((\alpha, \beta); \mathbb{R}^n)$ , genauer gilt  $\mathcal{L} = y_p + \mathcal{L}_h$  für jedes  $y_p \in \mathcal{L}$ .

*Beweis.* Aus Lemma 9.4 folgt:

- für jedes  $y_h \in \mathcal{L}_h$  ist  $y_p + y_h \in \mathcal{L}$ ;
- für jedes  $y \in \mathcal{L}$  ist  $y - y_p \in \mathcal{L}_h$  und  $y = y_p + (y - y_p) \in y_p + \mathcal{L}_h$ . □

Die Lösung eines homogenen DGL-Systems mit der Matrixexponentialfunktion erfordert eine Zusatzannahme:

**Satz 9.9** (Spezialfall). Sei  $A: (\alpha, \beta) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  stetig,  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  und

$$A(s)A(t) = A(t)A(s) \quad \text{für alle } s, t \in (\alpha, \beta). \quad (48)$$

Schreibe  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j}$  und setze

$$Y(t) := e^{B(t)} \quad \text{mit} \quad B(t) = \int_{t_0}^t A(s) ds := \left( \int_{t_0}^t a_{ij}(s) ds \right)_{i,j}.$$

Dann ist  $Y$  eine Fundamentalmatrix für das DGL-System  $y' = A(t)y$ .

*Beweis.* Für alle  $t \in (\alpha, \beta)$  gilt (Kettenregel):

$$Y'(t) = \left( \frac{d}{dt} \exp(B(t)) \right) = (D \exp)(B(t))B'(t),$$

wobei

$$B'(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} = A(t)$$

und  $(D \exp)(B(t))$  die Ableitung der Matrixexponentialfunktion an der Stelle  $\mathcal{B} := B(t)$  in Richtung  $\mathcal{A} := A(t)$  bezeichnet (siehe Analysis II), also

$$(D \exp)(B(t))A(t) = (D \exp)(\mathcal{B})\mathcal{A} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp(\mathcal{B} + s\mathcal{A}).$$

Aus (48) folgt  $B(t)A(t) = A(t)B(t)$ , also  $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}$  und  $\exp(\mathcal{B})\mathcal{A} = \mathcal{A}\exp(\mathcal{B})$ , und mit Lemma 8.8 und Satz 8.10 folgt

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp(\mathcal{B} + s\mathcal{A}) = \exp(\mathcal{B}) \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp(s\mathcal{A}) = \exp(\mathcal{B})\mathcal{A} = \mathcal{A}\exp(\mathcal{B}) = A(t) \exp(B(t)).$$

Zusammengefasst erhalten wir  $Y'(t) = A(t) \exp(B(t)) = A(t)Y(t)$ . Folglich sind die Spalten von  $Y$  jeweils Lösungen des DGL-Systems. Die Spalten sind linear unabhängig, weil  $Y(t) = \exp(B(t))$  für jedes  $t$  invertierbar ist. □

**Satz 9.10** (Inhomogener Fall). Seien  $A: (\alpha, \beta) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  und  $b: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $t_0 \in (a, b)$  und  $Y$  eine Fundamentalmatrix des DGL-Systems  $y' = A(t)y$ . Setze

$$c(t) := \int_{t_0}^t Y(s)^{-1} b(s) ds.$$

Dann definiert

$$y(t) = Y(t)c(t).$$

eine Lösung des linearen DGL-Systems  $y' = A(t)y + b(t)$ .

*Beweis.* Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt  $c'(t) = Y(t)^{-1}b(t)$  und mit Produktregel und der Annahme an  $Y$  folgt für alle  $t \in (\alpha, \beta)$ :

$$y'(t) = Y'(t)c(t) + Y(t)c'(t) = A(t)Y(t)c(t) + Y(t)Y(t)^{-1}b(t) = A(t)y(t) + b(t). \quad \square$$

## Teil III

## Differentialgleichungen höherer Ordnung

## 10 Reduktion auf Systeme erster Ordnung

## Grundidee

Eine explizite skalare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung der Form

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) \quad (49)$$

ist gleichwertig zu dem folgenden DGL-System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1, \\ y_1' &= y_2, \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1}, \\ y_{n-1}' &= f(t, y_0, \dots, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (50)$$

In der Tat, löst die Funktion  $x$  die Gleichung (49), so löst  $y := (x, x', \dots, x^{(n-1)})$  das System (50), und löst  $y = (y_0, \dots, y_{n-1})$  das System (50), so folgt  $y_i = y_0^{(i)}$  für alle  $i$  und  $x := y_0$  löst (49).

Wir betrachten nun Differentialgleichungen der folgenden Form:

**Definition 10.1.** Eine skalare lineare DGL  $n$ -ter Ordnung ist eine DGL der Form

$$x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \dots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + b(t) \quad (51)$$

mit Funktionen  $a_0, \dots, a_{n-1}, b$ . Sie heißt homogen, falls  $b \equiv 0$ , und sonst inhomogen.

Aus obiger Grundidee und den Sätzen des vorigen Kapitels folgt:

**Satz 10.2.** Seien  $a_0, \dots, a_{n-1}, b: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann

- hat die DGL (51) für jedes  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  und  $x_{(0)} \in \mathbb{R}^n$  genau eine Lösung  $x$  mit  $(x(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) = x_{(0)}$ ;
- bilden die Lösungen  $x_h: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  der zu (51) gehörigen homogenen DGL einen  $n$ -dimensionalen Untervektorraum  $\mathcal{L}_h$  von  $C((\alpha, \beta))$  und für jedes  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  ist die Abbildung

$$\mathcal{L}_h \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)),$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen;

- bilden die Lösungen  $x: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  der DGL (51) einen affinen Unterraum  $\mathcal{L}$  von  $C((\alpha, \beta))$ ; genauer, für jedes  $x_p \in \mathcal{L}$  gilt  $\mathcal{L} = x_p + \mathcal{L}_h$ .

**Definition 10.3.** In der obigen Situation nennt man eine Basis von  $\mathcal{L}_h$  ein Fundamentalsystem der zu (51) gehörigen homogenen DGL.

## 11 Lineare DGL n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

### Der homogene Fall

Wir betrachten nun eine homogene lineare DGL

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0 \quad (52)$$

mit konstanten Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ .

Das zugehörige homogene DGL-System hat die Form

$$\begin{pmatrix} x' \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (53)$$

und kann also mit den Methoden aus Kapitel 8 gelöst werden:

- Das charakteristische Polynom  $\chi_A$  von  $A$  berechnen wir durch Entwicklung der Determinante von  $A - \lambda I_n$  nach der letzten Zeile (bemerken Sie, dass die zugehörige "Untermatrizen" Dreiecksmatrizen sind):

$$\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0).$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind also die Nullstellen von  $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ .

- Ist  $\lambda$  ein Eigenwert, so ist

$$v := (1 \quad \lambda \quad \lambda^2 \quad \dots \quad \lambda^{n-1})^\top$$

ein Eigenvektor zu  $\lambda$ :

$$Av = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \underbrace{-a_0 - \lambda a_1 - \dots - a_{n-1}\lambda^{n-1}}_{\lambda^n} \end{pmatrix} = \lambda v.$$

Folglich definiert  $t \mapsto e^{\lambda t}v$  eine Lösung des Systems (53), und die Funktion  $x$  definiert durch  $x(t) = e^{\lambda t}$  ist eine Lösung der DGL (52). Dies kann man auch einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned} (e^{\lambda t})^{(n)} + a_{n-1}(e^{\lambda t})^{(n-1)} + \dots + a_1(e^{\lambda t})' + a_0e^{\lambda t} \\ = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} \\ = 0. \end{aligned}$$

**Definition 11.1.** Die charakteristische Gleichung der DGL (52) ist die Gleichung

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = 0$$

Wenn diese Gleichung  $n$  unterschiedliche Lösungen hat (in diesem Fall hat die zugehörige Matrix  $A$   $n$  unterschiedliche Eigenwerte), dann folgt mit der Theorie aus Kapitel 8 direkt, dass die allgemeine Lösung von (52) gegeben ist durch Linearkombinationen von Funktionen der Form  $t \mapsto e^{\lambda t}$ , wobei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  ist. (Wenn die charakteristische Gleichung komplexe Lösungen hat, dann treten also komplexwertige Lösungen auf.)

**Beispiel 11.2** (Ungedämpfter harmonischer Oszillator). Wir betrachten einen Massepunkt, der bei  $x = 0$  an einer Feder befestigt ist:

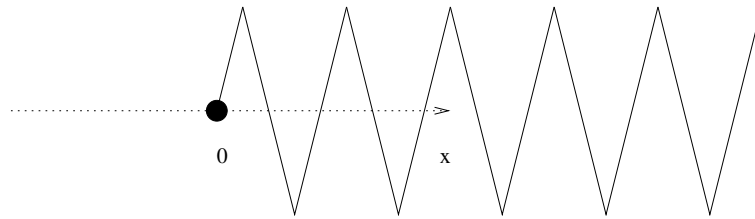


Abbildung 12: Massepunkt an Feder.

Bei Auslenkung des Massepunktes in  $x$ -Richtung und entsprechender Dehnung oder Stauchung der Feder wirkt auf den Massepunkt die Beschleunigung

$$x'' = -\frac{k}{m}x,$$

wobei  $k$  eine von der Feder abhängige Konstante und  $m$  die Masse des Massepunktes bezeichnet. Die Bewegung des Massepunktes auf der  $x$ -Achse wird somit durch die DGL

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

beschrieben, ähnlich wie in Beispiel 8.7. Man schreibt  $\kappa = \sqrt{\frac{k}{m}}$  und nennt die DGL

$$x'' + \kappa^2 x = 0 \tag{54}$$

die DGL des (*ungedämpften*) *harmonischen Oszillators*. Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \kappa^2$$

hat die konjugiert-komplexen Lösungen  $\pm i\kappa$ . Diese sind verschieden, da  $\kappa > 0$ . Folglich hat die allgemeine Lösung die Form

$$x(t) = \alpha_1 e^{i\kappa t} + \alpha_2 e^{-i\kappa t} \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Da  $e^{i\kappa t} = \cos(\kappa t) + i \sin(\kappa t)$  und da wir reelwertige Lösungen suchen, muss gelten:  $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha_1(\cos(\kappa t) + i \sin(\kappa t)) + \overline{\alpha_1}(\cos(\kappa t) - i \sin(\kappa t)) \\ &= 2 \operatorname{Re}(\alpha_1) \cos(\kappa t) - 2 \operatorname{Im}(\alpha_1) \sin(\kappa t). \end{aligned}$$

Äquivalent sieht man: Die allgemeine Lösung von (54) hat die Form

$$x(t) = \beta_1 \cos(\kappa t) + \beta_2 \sin(\kappa t) \quad \text{mit} \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}. \quad (55)$$

Für feste  $\beta_1$  und  $\beta_2 \neq 0$  kann man dies schöner schreiben; es gilt

$$\beta_1 = C \sin \phi \quad \text{und} \quad \beta_2 = C \cos \phi, \quad \text{wobei} \quad \phi = \arctan\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right), \quad C = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2},$$

also

$$x(t) = C(\sin \phi \cos(\kappa t) + \cos \phi \sin(\kappa t)) = C \sin(\kappa t + \phi).$$

Eine Lösung  $x$  mit vorgegebenen Anfangswerten

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0,$$

finden wir, indem wir  $\beta_1, \beta_2$  in (55) aus dem linearen Gleichungssystem

$$x_0 = \beta_1 \cos(\kappa t_0) + \beta_2 \sin(\kappa t_0), \quad v_0 = -\beta_1 \kappa \sin(\kappa t_0) + \beta_2 \kappa \cos(\kappa t_0)$$

bestimmen.

**Beispiel 11.3** (Gedämpfter harmonischer Oszillator). Wird in obigem Beispiel die Bewegung des Massepunktes durch auftretende Reibung gehemmt, die proportional zur Geschwindigkeit  $x'$  ist, so wird die Bewegung durch die DGL des *gedämpften harmonischen Oszillators*

$$x'' + 2\rho x' + \kappa^2 x = 0$$

mit einem  $\rho > 0$  beschrieben. Die Lösungen der charakteristische Gleichung sind diesmal

$$-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \kappa^2}.$$

Die allgemeine Lösung  $x$  ist dann

- im Fall  $\rho > \kappa$  (*starke Dämpfung*) gegeben durch

$$x(t) = e^{-\rho t}(\alpha_1 e^{vt} + \alpha_2 e^{-vt}) \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad v := \sqrt{\rho^2 - \kappa^2};$$

- im Fall  $\rho < \kappa$  (*schwache Dämpfung*) gegeben durch

$$x(t) = e^{-\rho t}(\alpha_1 \cos(vt) + \alpha_2 \sin(vt)) \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad v := \sqrt{\kappa^2 - \rho^2}$$

beziehungsweise (vgl. Beispiel 11.2)

$$x(t) = e^{\sigma - \rho t} \sin(\phi + vt) \quad \text{mit} \quad \sigma, \phi \in \mathbb{R}.$$



Wie kommt man zu (weiteren) Lösungen, wenn die charakteristische Gleichung Lösungen höherer Multiplizität besitzt, zum Beispiel wenn  $\rho = \kappa$  im obigen Beispiel?

**Satz 11.4.** Seien  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  und

$$p(X) := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = (X - \lambda_1)^{d_1} \dots (X - \lambda_r)^{d_r}. \quad (56)$$

Dann ist ein Fundamentalsystem der DGL

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0 \quad (57)$$

gegeben durch die Funktionen  $x_{j,s}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$x_{j,s}(t) := t^s e^{\lambda_j t}$$

für  $j = 1, \dots, r$  und  $s = 0, \dots, d_j - 1$ . Ein reelles Fundamentalsystem wird erhalten, indem man zu einer komplexen Nullstelle  $\lambda = \mu + i\nu$  (mit  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ ) mit Multiplizität  $k$  die  $k$  Lösungen in Real- und Imaginärteil, also die Funktionen

$$t \mapsto t^s e^{\mu t} \cos(\nu t) \quad \text{und} \quad t \mapsto t^s e^{\mu t} \sin(\nu t)$$

mit  $s = 0, \dots, d_j - 1$ , aufspaltet und die  $k$  zur Nullstelle  $\bar{\lambda}$  gehörenden Lösungen streicht.

*Beweisskizze.* Vorüberlegung: Sei  $j$  fest und  $\lambda := \lambda_j$ . Dann ist

$$p(\lambda) = 0, \quad p'(\lambda) = 0, \quad \dots, \quad p^{(d_j-1)}(\lambda) = 0.$$

Wir zeigen auf zwei verschiedene Arten, dass für  $s = 0, \dots, d_j - 1$  die Funktion  $x = x_{j,s}$  die DGL löst. Die lineare Unabhängigkeit dieser Funktionen folgt mit Hilfe des Übergangs zum zugehörigen DGL-System oder, indem man das Wachstumsverhalten der Lösungen für  $t \rightarrow \infty$  betrachtet. Die Übergang zu den Real- und Imaginärteilen folgt, wenn man berücksichtigt, dass wir reellwertige Lösungen suchen.

*Variante 1:* Man beweist induktiv die höhere Leibniz-Formel

$$(fg)^{(m)}(t) = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} f^{(l)}(t) g^{(m-l)}(t)$$

für  $m$ -fach differenzierbare Funktionen  $f, g$ . Anwendung auf die Funktion  $x := x_{j,s}: t \mapsto t^s e^{\lambda t}$  liefert

$$x^{(m)}(t) = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (t^s)^{(l)} \lambda^{m-l} e^{\lambda t} = \sum_{l=0}^m \underbrace{m(m-1)\dots(m-l+1)\lambda^{m-l}}_{\lambda^m, l \text{ mal nach } \lambda \text{ abgeleitet}} \frac{(t^s)^{(l)}}{l!} e^{\lambda t}$$

und damit

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = \sum_{l=0}^n p^{(l)}(\lambda) \frac{(t^s)^{(l)}}{l!} e^{\lambda t}. \quad (58)$$

Die rechte Seite ist 0, weil  $p^{(l)}(\lambda) = 0$  für  $l < d_j$  und  $(t^s)^{(l)} = 0$  für  $l \geq d_j > s$ .

*Variante 2:* Man zeigt induktiv, dass die Vektoren

$$w_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}, \quad w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ \binom{1}{1} \\ \binom{2}{1}\lambda \\ \vdots \\ \binom{n-1}{1}\lambda^{n-1} \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \binom{2}{2} \\ \binom{3}{2}\lambda \\ \vdots \\ \binom{n-1}{2}\lambda^{n-2} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Hauptvektoren erster, zweiter, dritter, ... Stufe von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  sind. Satz 8.24 liefert zu  $w_s$  eine vektorwertige Lösung, deren erste Komponente  $\frac{1}{s!}x_{j,s}$  ist.  $\square$

### Der inhomogene Fall

Um eine partikuläre Lösung einer inhomogenen linearen DGL höherer Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = b(t) \tag{59}$$

zu finden, kann man im Prinzip *Variation der Konstanten* wie im Fall erster Ordnung verwenden: Ist  $x_h$  eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL, so macht man für eine Lösung  $x_p$  der inhomogenen DGL den Ansatz  $x_p(t) = c(t)x_h(t)$ . Nun setzt man diesen Ansatz in die DGL ein, schreibt die Ableitungen  $x_p^{(m)}$  mit Hilfe der höheren Leibniz-Regel als Linearkombinationen von  $c^{(l)}x_h^{(m-l)}$  für  $l = 0, \dots, m$ , sortiert dann auf der linken Seite nach Ableitungen von  $c$ , und erhält für die gesuchte Funktion  $c$  eine DGL der Form

$$x_h(t)c^{(n)}(t) + d_{n-1}(t)c^{(n-1)}(t) + \dots + d_1(t)c'(t) + d_0(t)c(t) = b(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{60}$$

wobei die Funktionen  $d_i$  von den  $a_j$  und  $x_h^{(l)}$  abhängen. Dabei wird

$$d_0(t) = x_h^{(n)}(t) + a_{n-1}x_h^{(n-1)}(t) + \dots + a_0x_h(t) = 0$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  und somit ist (60) eine lineare DGL für  $c'$  der Ordnung  $n - 1$ . Schrittweise kann man so die Ordnung immer weiter reduzieren und schließlich eine Lösung von (59) erhalten. Offenbar ist dieses Verfahren recht aufwändig.

Wir betrachten jetzt deswegen nur lineare DGL mit konstanten Koeffizienten und speziellen Inhomogenitäten und beginnen mit der Ordnung 1.

**Lemma 11.5.** *Seien  $\lambda, a_0 \in \mathbb{C}$  und  $q$  ein Polynom vom Grad  $m$ . Dann hat die DGL*

$$x' + a_0x = q(t)e^{\lambda t}$$

*eine komplex-wertige Lösung  $x$  der Form  $x(t) = Q(t)e^{\lambda t}$  mit einem Polynom  $Q$  vom Grad  $m$  im Fall  $\lambda \neq -a_0$  beziehungsweise  $m + 1$  im Fall  $\lambda = -a_0$ .*

*Beweis.* Der Ansatz  $x(t) = Q(t)e^{\lambda t}$  liefert nach Produktregel

$$x'(t) + a_0x(t) = (Q'(t) + Q(t)\lambda)e^{\lambda t} + a_0Q(t)e^{\lambda t} = (Q'(t) + (\lambda + a_0)Q(t))e^{\lambda t}.$$

Falls  $\lambda + a_0 = 0$ , wird die rechte Seite  $Q'(t)e^{\lambda t}$  gleich  $q(t)e^{\lambda t}$ , wenn wir für  $Q$  eine Stammfunktion von  $q$  wählen; dies ist ein Polynom vom Grad  $m + 1$ .

Falls  $\lambda + a_0 \neq 0$ , so schreiben wir  $q(t) = b_mt^m + \dots + b_1t^1 + b_0$  und suchen ein Polynom  $Q(t) = c_mt^m + \dots + c_1t + c_0$  so, dass

$$\begin{aligned} b_mt^m + \dots + b_1t^1 + b_0 &= q(t) = Q'(t) + (\lambda + a_0)Q(t) \\ &= (\lambda + a_0)c_mt^m + ((\lambda + a_0)c_{m-1} + mc_m)t^{m-1} + \dots \\ &\quad + ((\lambda + a_0)c_1 + 2c_2)t^1 + ((\lambda + a_0)c_0 + c_1). \end{aligned}$$

Dazu setzen wir einfach

$$c_m = \frac{b_m}{\lambda + a_0}, \quad c_{m-1} = \frac{b_{m-1} - mc_m}{\lambda + a_0}, \quad \dots, \quad c_0 = \frac{b_0 - c_1}{\lambda + a_0}. \quad \square$$

Nun können wir die Aussage auf DGLn höherer Ordnung verallgemeinern.

**Satz 11.6.** *Seien  $a_0, \dots, a_{n-1}, \lambda \in \mathbb{C}$  und  $q$  ein Polynom vom Grad  $m$ . Dann hat die DGL*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = q(t)e^{\lambda t}$$

*eine komplex-wertige Lösung  $x$  der Form*

$$x(t) = Q(t)e^{\lambda t}$$

*mit einem Polynom  $Q$  vom Grad  $m + d$ , wobei  $d$  die Vielfachheit von  $\lambda$  als Lösung der charakteristische Gleichung der DGL bezeichnet; insbesondere ist  $d = 0$  wenn  $\lambda$  die charakteristische Gleichung nicht löst.*

*Beweis.* Wir schreiben die charakteristische Gleichung als Produkt von Linearfaktoren:

$$(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) = 0.$$

Bezeichnet  $D: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  den Ableitungsoperator  $f \mapsto f'$ , so folgt

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0x(t) = ((D - \lambda_1) \cdots (D - \lambda_n)x)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nun setzen wir  $x_0(t) := q(t)e^{\lambda t}$  und finden schrittweise für  $j = 1, \dots, n$  jeweils eine Lösung  $x_j$  der DGL  $x'(t) - \lambda_j x(t) = x_{j-1}(t)$  wie im vorigen Lemma. Dann ist  $x := x_n$  eine Lösung der DGL der gewünschten Form, weil

$$(D - \lambda_1) \cdots \underbrace{(D - \lambda_n)x_n}_{x_{n-1}} = \dots = (D - \lambda_1)x_1 = x_0. \quad \square$$

**Beispiel 11.7** (Angeregter harmonischer Oszillator). Wird im Beispiel 11.2 der Massepunkt zusätzlich durch eine periodisch wechselnde Beschleunigung  $\cos(vt)$  mit  $v \neq 0$  angeregt, so wird die Bewegung des Massepunktes durch die DGL

$$x'' + \kappa^2 x = \cos(vt) = \operatorname{Re}(e^{ivt}) \quad (61)$$

beschrieben.

- *Fall*  $v \neq \pm\kappa$ : Eine spezielle komplexwertige Lösung der DGL  $x'' + \kappa^2 x = e^{ivt}$  erhalten wir mit dem Ansatz  $x_p(t) = \alpha e^{ivt}$ , wenn

$$\alpha(i^2 v^2 + \kappa^2)e^{ivt} = e^{ivt},$$

also  $\alpha = \frac{1}{\kappa^2 - v^2}$ . Dann ist

- eine reellwertige Lösung  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\kappa^2 - v^2} e^{ivt}\right) = \frac{1}{\kappa^2 - v^2} \cos(vt)$ ;
- die allgemeine reelle Lösung  $x$  gegeben durch  $x(t) = \alpha_1 \cos(\kappa t) + \alpha_2 \sin(\kappa t) + \frac{1}{\kappa^2 - v^2} \cos(vt)$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ;
- die Lösung mit den Anfangswerten  $x(0) = 0$  und  $x'(0) = 0$  bestimmt durch die Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2$  mit

$$0 = x(0) = \alpha_1 + \frac{1}{\kappa^2 - v^2}, \quad 0 = x'(0) = \kappa \alpha_2,$$

also

$$x(t) = \frac{1}{\kappa^2 - v^2} (\cos(vt) - \cos(\kappa t)) = \frac{2}{\kappa^2 - v^2} \sin\left(\frac{v - \kappa}{2} t\right) \sin\left(\frac{v + \kappa}{2} t\right).$$

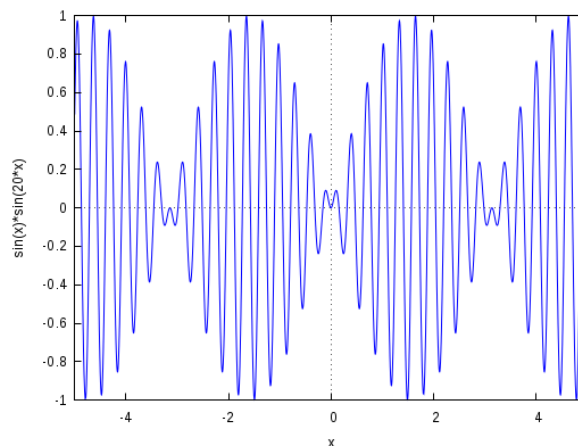


Abbildung 13: Periodisch angeregter harmonischer Oszillator

- *Fall  $v = \kappa$  (Resonanz)*: Da  $v$  eine Wurzel des charakteristischen Polynoms ist, erhalten wir nun eine komplexwertige Lösung der DGL  $x'' + \kappa^2 x = e^{ivt}$  mit dem Ansatz  $x_p(t) = \alpha t e^{ivt}$ , wenn

$$\alpha(i^2 v^2 t + 2iv + \kappa^2 t)e^{ivt} = e^{ivt},$$

also wenn  $\alpha = \frac{1}{2iv}$ . Dann ist eine reellwertige Lösung  $x(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2iv} t e^{ivt}\right) = \frac{1}{2} t \sin(vt)$ , und diese erfüllt die Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $x'(0) = 0$ .

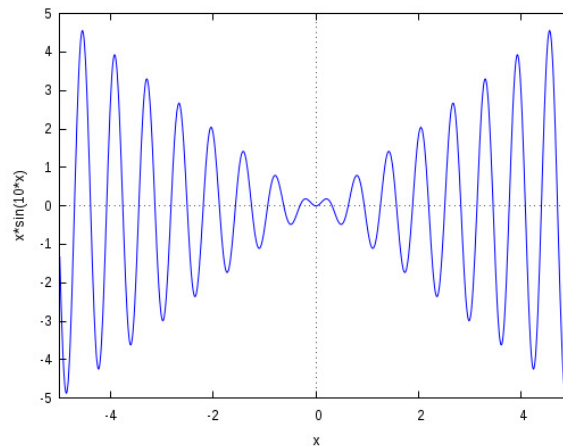


Abbildung 14: Angeregter harmonischer Oszillator mit Resonanz

Im Gegensatz zum obigen Fall wächst hier die Amplitude der Schwingung linear mit der Zeit. Dieses Phänomen ist von großer praktischen Bedeutung und beispielsweise dafür verantwortlich, dass

- Geigentöne Weingläser zum Zerbrechen bringen können,
- 1850 ein Bataillon im Gleichschritt marschierender Soldaten die Hängebrücke von Angers zum Einsturz brachte,
- 1940 der Wind eine Brücke über die Tacoma-Schlucht vier Monate nach Einweihung zum Einsturz brachte,
- durch Einstellung des Empfängers eines Analogradios auf die Frequenz eines Funksignals dieses verstärkt wiedergegeben werden kann.



**Literatur**

- [Arn01] V.I. Arnold, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 2. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg, 2001.
- [Aul04] B. Aulbach, *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, 2. Auflage, Springer Spektrum, Heidelberg, 2004.
- [BDP95] W.E. Boyce und R.C. DiPrima, *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Einführung, Aufgaben, Lösungen*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.
- [Heu09] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 6. Auflage, Vieweg + Teubner Verlag, Stuttgart, 2009.
- [Wal00] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 7. Auflage, Springer, Berlin, 2000.