Vortragsliste

1. Der Satz von Krein-Milman. Der Satz von Krein-Milman besagt, dass jede nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge K eines lokalkonvexen Vektorraumes Extremalpunkte hat, und dass K gleich der abgeschlossenen konvexen Hülle der Menge all dieser Extremalpunkte ist.

Ziel dieses Vortrags ist den Satz von Krein-Milman zu beweisen als wichtige Konsequenz den Satz von Stone-Weierstraß herzuleiten.

Literatur:

- Abschnitt V.7 von Conway: 'A Course in Functional Analysis'.
- Abschnitt 2.5 von Pedersen: 'Analysis Now'.

2. Das Spektrums eines Operators. Das *Spektrum* $\sigma(T)$ eines Operators $T \in \mathbb{B}(H)$ ist definiert als die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass $T - \lambda I$ nicht invertierbar ist. Wichtige Teilmengen des Spektrums sind das *approximative Punktspektrum* $\sigma_{ap}(T)$ und das *Kompressionsspektrum* $\sigma_k(T)$, definiert als die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass $T - \lambda I$ nicht von unten beschränkt ist bzw. nicht dichtes Bild hat. Das *Punktspektrum* $\sigma_p(T)$ ist definiert als die Menge der Eigenwerte von T. Es gilt $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ und $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_k(T)$. Während das Kompressionsspektrum und das Punktspektrum leer sein können, gilt $\sigma_{ap}(T), \sigma(T) \neq \emptyset$. Das Spektrum $\sigma(T)$ ist immer eine nichtleere, kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$.

In diesem Vortrag sollen die verschiedenen Spektra eingeführt werden und ihre Beziehungen und grundlegenden Eigenschaften gezeigt werden.

Literatur:

- Kapitel 8,10 in Halmos: 'A Hilbert space problem book'; z.B. die Probleme (Nummern beziehen sich auf die erste Auflage):
  58 (Spektrum des Adjungierten), 59 (Polynomieller Spektralabbildungssatz), 60 (Spektrum ähnlicher Operatoren), 61 (Spektrum von Produkten), 72 (Resolventen), 73 (Spektrum ist nichtleer).

3. Diagonal- und Multiplikationsoperatoren. Es sei H ein Hilbertraum mit einer ONB $(e_j)_j$. Ein *Diagonaloperator* auf H ist dann ein Abbildung $D\colon H \to H$ mit der Eigenschaft, dass $D(e_j) = \alpha_j e_j$ für ein geeignetes Tupel $(\alpha_j)_j$ in $\mathbb{C}$. Allgemeiner kann man für einen Maßraum (X, μ) und eine (beschränkte, messbare) Funktion $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ den *Multiplikationsoperator* $M_\varphi\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ durch $M_\varphi(f) := \varphi f$ definieren.

In diesem Vortrag sollen Diagonal- und Multiplikationsoperatoren eingeführt und ihre grundlegenden Eigenschaften (insbesondere ihre Spektra) berechnet werden.

Literatur:

- Kapitel 6,9 in Halmos: 'A Hilbert space problem book'; z.B. die Probleme (Nummern beziehen sich auf die erste Auflage):
  Probleme 46 (Diagonale Operatoren), 47 (Multiplikatoren auf ℓ^2), 48 (Spektrum von Diagonaloperatoren), 49-52 (Norm und Spektrum vom Multiplikationsoperatoren), 65-66 (Spektra von Diagonal- und Multiplikationsoperatoren).

4. Der Spektralradius. Der *Spektralradius* $r(T)$ eines Operators $T \in \mathbb{B}(H)$ ist definiert als $r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$. Es gilt die wichtige Formel

$$r(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n}.$$

Ein Operator heißt *nilpotent*, falls $T^n = 0$ für ein $n \geq 1$. Für einen nilpotenten Operator T gilt $r(T) = 0$ und damit $\sigma(T) = \{0\}$. Ein Operator T mit $r(T) = 0$ heißt *quasi-nilpotent*. Jeder nilpotente Operator ist also quasi-nilpotent, aber die Umkehrung gilt nicht.

In diesem Vortrag soll der Spektralradius eingeführt werden und dessen grundlegenden Eingeschaften gezeigt werden. Weiter sollen der ein- und zweiseitige Shift, sowie allgemeiner gewichtete Shifts betrachtet werden. Damit kann dann die Existenz von quasinilpotenten Operatoren, die nicht nilpotent sind, bewiesen werden.
Literatur:

- Kapitel 9,10 in Halmos: 'A Hilbert space problem book'; z.B. die Probleme (Nummern beziehen sich auf die erste Auflage):
  67-68 (Ein- und zweiseitiger Shift), 74 (Spektralradius), 77 (Norm und Spektralradius gewichteter Shifts), 78 (Eigenwerte gewichteter Shifts), 80 (Quasi-nilpotente Operatoren).

5. Topologien auf B(H). Auf dem Raum $\mathbb{B}(H)$ der beschränkten, linearen Operatoren auf einem (separablen, unendlich-dimensionalen) Hilbertraum H gibt es neben der Normtopologie weitere wichtige Topologien: die starke Operatortopologie SOT, und die schwache Operatortopologie WOT, wobei für ein Netz $(T_j)_j$ in $\mathbb{B}(H)$ und $T \in \mathbb{B}(H)$ gilt:

$$T_j \xrightarrow{\text{SOT}} T \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in H : \lim_j \|T_j(x) - T(X)\| = 0,$$

$$T_j \xrightarrow{\text{WOT}} T \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, x, y \in H : \lim_j \langle T_j(x), y\rangle = \langle T(x), y\rangle.$$

In diesem Vortrag sollen die grundlegenden Eigenschaften (z.B. Stetigkeit der Inversion, der Multiplikation, des Spektrums) der Normtopologie, der SOT und der WOT auf $\mathbb{B}(H)$ dargestellt werden.
Literatur:

- Kapitel 11,12 in Halmos: 'A Hilbert space problem book'; z.B. die Probleme (Nummern beziehen sich auf die erste Auflage):
  83 (Separabilität von $\mathbb{B}(H)$ in der Normtopologie), 84 (Stetigkeit der Inversionsabbildung), 85-87 (Stetigkeit und Halbstetigkeit des Spektrums und Spektralradius), 88 (Starke und schwache Operatortopologie), 89-93 (Stetigkeit der Norm, des Adjungierten, der Multiplikation), 94 (Aufsteigende Folgen von hermitischen Operatoren).

6. Partielle Isometrien I. Eine *Isometrie* auf einem Hilbertraum H ist ein Operator $V \in \mathbb{B}(H)$ mit $\|V(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in H$. Man kann zeigen, dass $V \in \mathbb{B}(H)$ genau dann eine Isometrie ist, wenn $V^*V = I$. Insbesondere ist jede Isometrie injektiv. Eine *partielle Isometrie* ist ein Operator $V \in \mathbb{B}(H)$, der $\|V(x)\| = \|x\|$ nur für alle $x \in \text{Kern}(V)^\perp$ erfüllt. Man kann zeigen, dass $V \in \mathbb{B}(H)$ genau dann eine Isometrie ist, wenn $V = VV^*V$.

In diesem Vortrag soll die grundlegende Theorie der partiellen Isometrien dargestellt werden. Insbesondere soll gezeigt werden, dass die Wegzusammenhangskomponenten des Raums der partiellen Isometrien auf einem Hilbertraum durch den Rank, den Co-Rang und die Nullheit bestimmt sind.
Literatur:

- Kapitel 13 in Halmos: 'A Hilbert space problem book'; z.B. die Probleme (Nummern beziehen sich auf die erste Auflage):
  97 (Spektralabbildungssatz für normale Operatoren), 98 (Charakterisierung von partielle Isometrien), 99 (maximale partielle Isometrien), 100 (Abschluss und Zusammenhang der Menge der partielle Isometrien), 101 (Rang, Co-Rang, Nullheit), 102 (Komponenten des Raums der partiellen Isometrien), 103 (Unitäre Äquivalenz).

7. Partielle Isometrien II. Dieser Vortrag ist eine Fortsetzung des ersten Vortrags ber partielle Isometrien.
Literatur:

- Kapitel 13 in Halmos: 'A Hilbert space problem book'; z.B. die Probleme (Nummern beziehen sich auf die erste Auflage):
  104 (Spektrum), 105 (Polarzerlegung), 106 (Maximale Polarzerlegung), 107 (Extrempunkte des Einheitsballs), 109 (Dichtheit der Invertierbaren), 110 (Zusammenhang der invertierbaren).

8. Schauderbasen. Eine Schauderbasis in einem Banachraum E ist eine Folge in E, sodass jedes Element von E bezüglich ihr eine eindeutige Darstellung als unendliche Linearkombination hat. Sie ist zu unterscheiden von der Hamelbasis, von der verlangt wird, dass sich jeder Vektor als endliche Linearkombination der Basiselemente darstellen lässt.

Dieser Vortrag behandelt elementare Eigenschaften von Schauderbasen und gibt Beispiele von Schauderbasen in wichtigen Banachräumen.
Literatur:

- Kapitel 1 in Albiac und Kalton: 'Topics in Banach Space Theory'.
- Kapitel 2.II in Beauzamy: 'Introduction to Banach Spaces and their Geometry'.

9.-10. Endliche Repräsentierbarkeit und Ultraprodukte (2 Vorträge). Manche Eigenschaften von Banachräumen sind in der Struktur ihrer endlichdimensionalen Unterräume festgelegt. Ein Banachraum F ist endlich repräsentierbar in einem Banachraum E, wenn die endlichdimensionale Unterräume von F mit beliebiger Toleranz $\varepsilon > 0$ als Unterräume in E enthalten sind. Dieser Begriff führt zur *lokalen Theorie* von Banachräumen.

Dieser Vortrag behandelt den Begriff der endlichen Repräsentierbarkeit und die Verbindung zu Ultraprodukten.
Literatur:

- Kapitel 12-13 in Albiac und Kalton: 'Topics in Banach Space Theory'.
- Kapitel 4.I in Beauzamy: 'Introduction to Banach Spaces and their Geometry'.

11. Der Satz von Krein-Smulian. Der Satz von Krein-Smulian besagt, dass für eine konvexe Teilmenge A eines Dualraumes E' eines Banachraumes E Folgendes gilt: Wenn $A \cap \{\varphi \in E' \mid \|\varphi\| \leq r\}$ für jedes $r > 0$ schwach*-abgeschlossen ist, dann ist A schon schwach*-abgeschlossen. Dieser Satz hat sehr wichtige Konsequenzen für Approximationseigenschaften für Funktionenräume.

Ziel dieses Vortrags ist den Satz von Krein-Smulian zu beweisen. Als wichtige Konsequenz kann bewiesen werden, dass einige Banachräume kein Dualraum eines Banachraumes sein können.
Literatur:

- Abschnitt V.12 von Conway: 'A Course in Functional Analysis'.
- Abschnitt 2.5 von Pedersen: 'Analysis Now'.

12.-13. Die Sätze von Radon-Nikodym und Riesz-Markov (2 Vorträge). Sei (X, μ) ein (schöner) Maßraum, und ν ein Maß auf X, welches absolut stetig bzgl. μ ist. Der Satz von Radon-Nikodym besagt, dass es dann eine messbare Funktion f gibt, so dass $\nu(E) = \int_E f d\mu$ für alle messbaren $E \subseteq X$. Wir schreiben $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Dieser Satz hat zahlreiche Anwendungen, und ist zum Beispiel für die Wahrscheinlichkeitstheorie sehr wichtig.

Der Satz von Riesz-Marko besagt, dass für jeden kompakten Hausdorffraum X ein natürlicher isometrischer Isomoprhismums $C(X)^* \cong M(X)$ existiert, wobei $M(X)$ der Raum der regulären, komplexen Borelmaße auf X ist.

In diesem Vortrag soll zuerst an die benötigten Begriffe aus der Maßtheorie erinnert werden. Dann sollen die genanten Sätze vorgestellt und ihre Beweise skizziert werden.

Literatur:

- Satz 2.14 und Kapitel 6 in Rudin: 'Real and Complex Analysis'
- Appendix C in Conway: 'A course in Functional Analysis'
- Kapitel 28-32 in Halmos: 'Measure theory'

14. Isometrien von Lp-Räumen und der Satz von Lamperti. Es sei (X, μ) ein (schöner) Maßraum und $p \in [1, \infty)$ mit $p \neq 2$. Weiter sei $\varphi \colon L^p(X, \mu) \to L^p(X, \mu)$ eine lineare Isometrie. Der Satz von Lamperti besagt, dass dann eine messbare Funktion $h \colon X \to \mathbb{T}$ und eine invertierbare, Maßklassen-erhaltende Transformation (measure class preserving transformation) $T \colon X \to X$ existieren, so dass

$$\varphi(f)(x) = h(x) \left(\tfrac{d(\mu \circ T^{-1})}{d\mu}(x) \right)^{1/p} f(T^{-1}(x)),$$

für alle $f \in L^p(X, \mu)$ und (fast alle) $x \in X$. Der Satz liefert also eine sehr konkrete Struktur der Isometrien auf L^p-Räumen.

In diesem Vortrag sollen zuerst die Clarkson Ungleichungen für Elemente von L^p-Räumen gezeigt werden. Darauf aufbauend soll dann der Satz von Lamperti bewiesen werden.

Literatur:

- Chou, Day, Jeang: 'On the Banach-Stone problem for L^p-spaces'
- Kapitel 4 in Gardella, Thiel: 'Banach algebras generated by an invertible isometry of an L^p-space'
- Kapitel 3 in Fleming, Jamison: 'Isometries on Banach spaces. Vol. 1. Function Spaces'
- Lamperti: 'On the isometries of certain function-spaces'