Präsenzaufgaben für 06.07.2018.

Aufgabe 1

Beweisen Sie die Implikation (iv) $\Rightarrow$ (ii) in Satz 10.25 mit Hilfe der in der Vorlesung gegebenen Schritte. (Dies stimmt überein mit der Implikation (4) $\Rightarrow$ (2) in [Brown–Ozawa, Theorem 12.1.7] und dem dort skizzierten Beweis.)

Aufgabe 2

Sei M ein II_1-Faktor mit Eigenschaft (T). Zeigen Sie, dass M bezüglich $\|.\|_2$ separabel ist.

Hinweis: Setze $\varepsilon = 1$, und sei (F, δ) wie in der Definition von Eigenschaft (T). Zeigen Sie, dass M die von-Neumannalgebra $\mathrm{vN}(F)$ erzeugt von F ist. (Es gibt eine spurerhaltende bedingte Erwartung von M auf $\mathrm{vN}(F)$.) Warum ist diese von-Neumannalgebra $\|.\|_2$-separabel?

Aufgabe 3

Sei Γ eine abzählbare diskrete Gruppe erzeugt von einer endlichen symmetrischen Erzeugermenge S mit $e \notin S$, und sei (Γ_n) eine Folge von normalen Untergruppen von Γ mit endlichem Index, sodass $|\Gamma/\Gamma_n| \to \infty$. Betrachten Sie die Folge von Cayley-Graphen $\mathrm{Cay}(\Gamma/\Gamma_n, Q_n(S))$, wobei $Q_n : \Gamma \to \Gamma/\Gamma_n$ die Quotientenabbildung ist.

Zeigen Sie: wenn Γ Eigenschaft (T) hat, dann ist $(\mathrm{Cay}(\Gamma/\Gamma_n, Q_n(S)))$ eine Expander-Familie.