Präsenzaufgaben für 29.06.2018.

Aufgabe 1

Sei A eine unitale C^*-Algebra, Γ eine mittelbare, abzählbare, diskrete Gruppe und $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Aut}(A)$ eine Wirkung.

(a) Zeigen Sie, dass $A \rtimes_\alpha \Gamma \cong A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma$.

(b) Zeigen Sie, dass A genau dann nuklear ist, wenn $A \rtimes_\alpha \Gamma$ nuklear ist.

Aufgabe 2

Sei Γ eine abzählbare diskrete Gruppe, (E, η) ein Kazhdanpaar für Γ und $\pi : \Gamma \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung von Γ, sodass ein Vektor $\xi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ existiert mit $\pi(t)\xi = \xi$ für alle $t \in E$. Zeigen Sie, dass $\pi(t)\xi = \xi$ für alle $t \in \Gamma$, d.h. ξ ist ein Γ-invarianter Vektor für π.

Hinweis: Sei $\mathcal{H}_0$ der Raum von Γ-invarianten Vektoren in $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K} = \mathcal{H}_0^\perp$. Die Darstellung $\pi|_\mathcal{K} : \Gamma \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ hat keine nicht-triviale invariante Vektoren. Schreibe $\xi = \xi_0 + \zeta$ mit $\xi_0 \in \mathcal{H}_0$ und $\zeta \in \mathcal{K}$.

Aufgabe 3

Sei Γ eine abzählbare diskrete Gruppe. Zeigen Sie, dass wenn $E \subset \Gamma$ eine Erzeugermenge für Γ ist, dann existiert ein $\eta > 0$, sodass (E, η) ein Kazhdanpaar für Γ ist.

Aufgabe 4

Sei Γ eine abzählbare diskrete Gruppe, und sei Λ eine normale Untergruppe von Γ. Zeigen Sie, dass wenn Γ Eigenschaft (T) hat, dann hat Γ/Λ Eigenschaft (T).

Aufgabe 5

Sei Γ eine abzählbare diskrete Gruppe, $\pi : \Gamma \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung und π_0 die triviale Darstellung.

(a) Zeigen Sie, dass $\pi_0 \preccurlyeq \pi$ genau dann, wenn eine Folge (ξ_n) von Einheitsvektoren in $\mathcal{H}$ existiert, sodass für alle $s \in \Gamma$: $\|\pi(s)\xi_n - \xi_n\| \to 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\pi_0 \subseteq \pi$ genau dann, wenn ein Einheitsvektor $\xi \in \mathcal{H}$ existiert, sodass für alle $s \in \Gamma$: $\pi(s)\xi = \xi$.