Übungen zur Vorlesung "Operatoralgebren II" **SoSe 2018**
Prof. Dr. T. de Laat **Blatt 8**

Präsenzaufgaben für 15.06.2018.

Aufgabe 1

Beschreiben Sie das algebraische Tensorprodukt $\mathbb{C}^n \odot \mathbb{C}^m$, das Tensorprodukt $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ von Hilberträumen und das minimale Tensorprodukt $\mathbb{C}^n \otimes_{\mathrm{min}} \mathbb{C}^m$ von C^*-Algebren.

Aufgabe 2

Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \odot \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ injektiv ist.

Aufgabe 3

Es seien A, B und C C^*-Algebren.

(a) Zeigen Sie, dass $\|.\|_{\mathrm{min}}$ und $\|.\|_{\mathrm{max}}$ die C^*-Identität (auf $A \odot B$) erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass $\otimes_{\mathrm{min}}$ und $\otimes_{\mathrm{max}}$ kommutativ sind, d.h. es existieren kanonische $*$-Isomorphismen $A \otimes B \cong B \otimes A$ und $A \otimes_{\mathrm{max}} B \cong B \otimes_{\mathrm{max}} A$.

(c) Zeigen Sie, dass $\otimes_{\mathrm{min}}$ und $\otimes_{\mathrm{max}}$ assoziativ sind, d.h. es existieren kanonische $*$-Isomorphismen $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$ und $(A \otimes_{\mathrm{max}} B) \otimes_{\mathrm{max}} C \cong A \otimes_{\mathrm{max}} (B \otimes_{\mathrm{max}} C)$.

(d) Zeigen Sie, dass kanonische $*$-Isomorphismen $(A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$ und $(A \oplus B) \otimes_{\mathrm{max}} C = (A \otimes_{\mathrm{max}} C) \oplus (B \otimes_{\mathrm{max}} C)$ existieren.

Aufgabe 4

Es seien A und B unitale C^*-Algebren. Zeigen Sie, dass das maximale Tensorprodukt von A und B $*$-isomorph ist zur universellen C^*-Algebra, welche von kommutierenden Kopien von A und B erzeugt wird, d.h.

$$A \otimes_{\mathrm{max}} B \cong C^*(A, B \mid [A, B] = 0).$$