Übungen zur Vorlesung "Operatoralgebren II" **SoSe 2018**
Prof. Dr. T. de Laat **Blatt 6**

Präsenzaufgaben für 01.06.2018.

Aufgabe 1

Seien A und B C^*-Algebren, C eine C^*-Unteralgebra von A und $\theta : A \to B$ nuklear. Zeigen Sie, dass $\theta|_C : C \to B$ nuklear ist.

Es ist im Allgemeinen nicht so, dass $\theta|_C : C \to \theta(C)$ nuklear ist.

Aufgabe 2

(a) Seien A, B und C C^*-Algebren und $\theta : A \to B$ und $\sigma : B \to C$ k.v.p. Abbildungen. Zeigen Sie: Wenn eine der beiden Abbildungen θ und σ nuklear ist, dann ist $\sigma \circ \theta$ nuklear. (Insbesondere: Wenn A eine nukleare C^*-Algebra ist, dann ist jede k.v.p. Abbildung $\theta : A \to B$ nuklear.)

(b) Sei $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine C^*-Algebra, sodass die Inklusionsabbildung $\iota : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nuklear ist. Zeigen Sie, mit Hilfe des Fortsetsungzsatzes von Arveson, dass jede k.v.p. Abbildung $\theta : A \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ nuklear ist.

Aufgabe 3

(a) Seien A und B C^*-Algebren, C eine C^*-Unteralgebra von B und $\theta : A \to B$ nuklear mit $\theta(A) \subset C$. Zeigen Sie, dass wenn eine bedingte Erwartung $\Phi : B \to C$ existiert, dann ist $\theta : A \to C$ nuklear.

Insbedondere gilt: Wenn A nuklear und C eine C^*-Unteralgebra von A ist, dann ist C nuklear, wenn eine bedingte Erwartung $\Phi : A \to C$ existiert.

(b) Formulieren Sie ein Analogon für Semidiskretheit.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Hereditäre Unteralgebren (insbesondere Ideale) von nuklearen C^*-Algebren sind nuklear.

Aufgabe 5

Sei A eine nicht-unitale C^*-Algebra, und sei $\tilde{A}$ ihre Unitalisierung. Zeigen Sie, dass $\tilde{A}$ genau dann nuklear (bzw. exakt) ist, wenn A nuklear (bzw. exakt) ist.