Präsenzaufgaben für 18.05.2018.

Aufgabe 1

Sei M eine von Neumann-Algebra mit einem treuen, normalen Spurzustand τ, und sei $N \subset M$ eine von Neumann-Unteralgebra mit $1_M \in N$. Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte, spurerhaltende, normale bedingte Erwartung $E : M \to N$ existiert.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, mit Hilfe der Propositionen 5.20 und 5.21 der Vorlesung, folgenden Fortsetzungssatz:

Sei B eine C^*-Unteralgebra einer C^*-Algebra A, und sei $\varphi : B \to M_n(\mathbb{C})$ k.v.p. Dann besitzt φ eine k.v.p. Fortsetzung $\bar{\varphi} : A \to M_n(\mathbb{C})$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) $\theta : A \to B$ ist genau dann nuklear, wenn für jede endliche Teilmenge $F \subset A$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und k.v.p. Abbildungen $\varphi : A \to M_n(\mathbb{C})$ und $\psi : M_n(\mathbb{C}) \to B$ existieren, sodass $\|\theta(a) - \psi \circ \varphi(a)\| < \varepsilon$ für alle $a \in F$.

(b) $\theta : A \to B$ ist genau dann nuklear, wenn Netze von k.v.p. Abbildungen $\varphi_i : A \to C_i$ und $\psi_i : C_i \to B$ existieren, wobei C_i eine endlichdimensionale C^*-Algebra ist, sodass $\psi_i \circ \varphi_i \to \theta$ bezüglich der Punkt-Normtopologie.

Aufgabe 4

Sei A eine C^*-Algebra. Sei A^{op} derselbe Vektorraum, versehen mit derselben Norm und Involution, aber mit der Multiplikation $a \cdot b = ba$. Zeigen Sie:

(a) A^{op} ist eine C^*-Algebra.

(b) $M_2(\mathbb{C})$ und $M_2(\mathbb{C})^{\mathrm{op}}$ sind $*$-isomorph. Können Sie einen $*$-Isomorphismus explizit angeben?

(c) Die Abbildung $\mathrm{id} : A \to A^{\mathrm{op}}$ ist positiv. Sie ist genau dann vollständig positiv, wenn A kommutativ ist.

Bemerkung: Im Allgemeinen gilt nicht: $A \cong A^{\mathrm{op}}$. Es ist eine offene Frage, ob die Aussage für A nuklear und separabel richtig ist.