Präsenzaufgaben für 11.05.2018.

Aufgabe 1
Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_n\}_{n\in N}$. Jedes $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kann man als unendliche Matrix mit Komponenten $\langle Te_i, e_j\rangle$ auffassen. Sei $t : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ die Transponierungsabbildung. Zeigen Sie, dass t beschränkt, aber nicht vollständig beschränkt, ist.

Aufgabe 2
Beweisen Sie die Universalität des Tensorprodukts:

Für jeden Vektorraum Z und jede bilineare Abbildung $\sigma : X \times Y \to Z$ existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\dot{\sigma} : X \odot Y \to Z$, sodass $\dot{\sigma}(x \otimes y) = \sigma((x, y))$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Falls W ein Vektorraum ist mit einer bilinearen Abbildung $T : X \times Y \to W$, sodass für jeden Vektorraum Z und jede bilineare Abbildung $\sigma : X \times Y \to Z$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\dot{\sigma} : W \to Z$ mit $\dot{\sigma}(T(x, y)) = \sigma((x, y))$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ existiert, so gilt: $W \cong X \odot Y$.

Aufgabe 3
Es seien X und Y Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass wenn $\{x_i\}_{i\in I}$ eine Basis für X und $\{y_j\}_{j\in J}$ eine Basis für Y ist, dann ist $\{x_i \otimes y_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ eine Basis für $X \odot Y$.

(b) Zeigen Sie, dass wenn $\{x_i\}_{i\in I}$ eine Basis für X ist, dann existiert für jedes $v \in X \odot Y$ eine eindeutig bestimmte Familie $\{y_i\}_{i\in I}$, sodass $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$.

Aufgabe 4

Sei

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen und W ein Vektorraum. Dann ist die Sequenz

$$0 \to X \odot W \to Y \odot W \to Z \odot W \to 0$$

auch exakt.