Präsenzaufgaben für 04.05.2018.

Aufgabe 1 (Der kommutative 2-Torus)
Es sei $X = \{u, v\}$ eine Menge zweier Elemente und $\mathcal{R} = \{uu^* = u^*u = 1, vv^* = v^*v = 1, uv = vu\}$ eine Menge von Relationen. Eine $\mathcal{R}$-Darstellung π in eine unitale C*-Algebra B ist eine Abbildung $\pi : X \to B$, sodass $\pi(u)$ und $\pi(v)$ unitäre Elemente in B sind und $\pi(u)\pi(v) = \pi(v)\pi(u)$ gilt.
Es sei nun $(\mathcal{A} = C^*(X, \mathcal{R}), \iota_X)$ die universelle C*-Algebra erzeugt von $(X, \mathcal{R})$ bestehend aus einer C*-Algebra $\mathcal{A}$ und einer $\mathcal{R}$-Darstellung $\iota_X : X \to \mathcal{A}$, so dass es zu jeder $\mathcal{R}$-Darstellung π in eine unitale C*-Algebra B genau einen *-Homormorphismus $\overline{\pi} : \mathcal{A} \to B$ mit $\overline{\pi} \circ \iota_X = \pi$ gibt.
Das Ziel dieser Aufgabe ist es

$$\mathcal{A} \cong C(\mathbb{T} \times \mathbb{T}) \cong C^*(\mathbb{Z}^2)$$

zu zeigen. Aus diesem Grund nennt man $\mathcal{A}$ auch "kommutativer 2-Torus".

(a) Zeigen Sie mithilfe der universellen Eigenschaften von $\mathcal{A}$ und der universellen Gruppen-C*-Algebra $(C^*(\mathbb{Z}^2), \iota_{\mathbb{Z}^2})$, dass es einen *-Isomorphismus $\phi_1 : \mathcal{A} \to C^*(\mathbb{Z}^2)$ mit

$$\phi_1 \circ \iota_X(u) = \iota_{\mathbb{Z}^2}(1, 0) \text{ und } \phi_1 \circ \iota_X(v) = \iota_{\mathbb{Z}^2}(0, 1)$$

gibt.
(Beachten Sie, dass eine $\mathcal{R}$-Darstellung kanonisch zu einer unitären Gruppendarstellung von $\mathbb{Z}^2$ fortgesetzt und umgekehrt jede unitäre Gruppendarstellung von $\mathbb{Z}^2$ zu einer $\mathcal{R}$-Darstellung eingeschränkt werden kann.)

(b) Zeigen Sie ferner, dass es einen *-Isomorphismus $\phi_2 : C^*(\mathbb{Z}^2) \to C(\mathbb{T}^2)$ mit

$$\phi_2 \circ \iota_{\mathbb{Z}^2}(1, 0) = \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}, (z_1, z_2) \mapsto z_1 \text{ und } \phi_2 \circ \iota_{\mathbb{Z}^2}(0, 1) = \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}, (z_1, z_2) \mapsto z_2$$

gibt. Der Beweis kann in den folgenden Schritten erbracht werden:

(i) Es sei $\widehat{\mathbb{Z}^2} = \{\chi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{T} \mid \chi \text{ Gruppenhomomorphismus}\} \subseteq \prod_{\mathbb{Z}^2} \mathbb{T}$ versehen mit der relativen Produkttopologie. Zeigen Sie, dass

$$: \Delta(C^*(\mathbb{Z}^2)) \to \widehat{\mathbb{Z}^2}, \chi \mapsto \chi \circ \iota_{\mathbb{Z}^2}$$

ein Homöomorphismus ist.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$: \widehat{\mathbb{Z}^2} \to \mathbb{T}^2, \chi \mapsto (\chi(1, 0), \chi(0, 1))$$

ein Homöomorphismus ist.

(iii) Folgern Sie schließlich die Aussage aus Punkt (b).

Aufgabe 2 (Die nichtkommutativen Tori)

Ziel dieser Aufgabe ist die Beschreibung/Definition der nichtkommutativen Tori als universelle C*-Algebra und als verschränktes Produkt.
Es seien $\theta \in [0,1)$, $X = \{u, v\}$ und $\mathcal{R}_\theta = \{uu^* = u^*u = 1,\, vv^* = v^*v = 1,\, uv = e^{2\pi i\theta}vu\}$. Ferner sei $(\mathcal{A}_\theta, \iota_\theta)$ die universelle C*-Algebra erzeugt von $(X, \mathcal{R}_\theta)$.
Beachten Sie, dass $\mathcal{A}_0$ gleich der C*-Algebra $\mathcal{A}$ aus Aufgabe 1 ist. Im Fall $\theta \in (0,1)$ heißt $\mathcal{A}_\theta$ **nichtkommutativer Torus**, da die Erzeuger u und v nicht mehr miteinander kommutieren.
Ferner sei nun $h_\theta : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$. Der Homöomorphismus h_θ induziert durch

$$\alpha_\theta : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(C(\mathbb{T}))$$

mit

$$\alpha_\theta(n)(f)(z) = f(e^{-2\pi i n\theta})$$

für $n \in \mathbb{Z}$, $f \in C(\mathbb{T})$ und $z \in \mathbb{T}$ eine Gruppenwirkung auf $C(\mathbb{T})$.
Schließlich bezeichne $(C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}, (\iota_\mathbb{Z},\, \iota_{C(\mathbb{T})}))$ das universelle verschränkte Produkt der Gruppenwirkung α_θ bestehend aus einer C*-Algebra $C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}$ und der universellen kovarianten Darstellung $(\iota_\mathbb{Z}, \iota_{C(\mathbb{T})})$ sodass es zu jeder nichtentarteten kovarianten Darstellung (U, π) von der Gruppenwirkung α_θ genau einen *-Homomorphismus $U \rtimes \pi : C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha_\theta} \mathbb{Z} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $U \rtimes \pi \circ \iota_{C(\mathbb{T})} = \pi$ und $U \rtimes \pi \circ \iota_\mathbb{Z} = U$ gibt.

Zeigen Sie mithilfe der universellen Eigenschaften von $\mathcal{A}_\theta$ und $C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}$ die Existenz eines *-Homormorphismus' $\psi : \mathcal{A}_\theta \to C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}$ mit

$$\psi \circ \iota_X(u) = \iota_{C(\mathbb{T})}(\mathrm{id}_\mathbb{T}) \text{ und } \psi \circ \iota_X(v) = \iota_\mathbb{Z}(1).$$

Beweisen Sie ferner, dass ψ ein *-Isomorphismus ist.