Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe)

Das Hauptziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die reduzierte Gruppen-C*-Algebra der freien Gruppe $\mathbb{F}_2$ einfach ist.

(a) Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$ ein Unter-Hilbertraum von $\mathcal{H}$ und $P_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ die kanonische Projektion auf $\mathcal{H}_0$. Es sei nun $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Operator mit $P_0 T P_0 = 0$ und $(U_i)_{i=1,\cdots,n} \in \mathcal{U}(\mathcal{H})^n$ unitäre Operatoren, sodass für $i \neq j$ $(1-P_0)U_i U_j^*(1-P_0) = 0$ gilt.
Zeigen Sie die Abschätzung

$$\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i T U_i^*\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}\|T\|.$$

(b) Es bezeichnen $u, v \in \mathbb{F}_2$ die kanonischen Erzeuger von $\mathbb{F}_2$. Zeigen Sie unter Zuhilfenahme von (a) für $g \in \mathbb{F}_2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda(u^i)\lambda(g)\lambda(u^{-i}) = \begin{cases} \lambda(g) & \text{falls } g = u^k \text{ für } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\lambda : \mathbb{F}_2 \to \mathcal{U}(\ell^2(\mathbb{F}_2))$ die reguläre Gruppendarstellung von $\mathbb{F}_2$ bezeichnet.

(c) Folgern Sie mithilfe von (b) die folgende Aussage:
Es sei $a \in C_\lambda^*(\mathbb{F}_2)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda(u^i v^j)\lambda(a)\lambda(v^{-j}u^{-i}) = \tau(a)\mathrm{id}_{\ell^2(\mathbb{F}_2)}.$$

Hierbei ist $\tau : C_\lambda^*(\mathbb{F}_2) \to \mathbb{C}$ der treue Spurzustand aus der Vorlesung.

(d) Folgern Sie aus (c) schließlich, dass die reduzierte Gruppen-C*-Algebra $C_\lambda^*(\mathbb{F}_2)$ von $\mathbb{F}_2$ einfach und τ der einzige Spurzustand auf $C_\lambda^*(\mathbb{F}_2)$ ist.

(e) Zeigen Sie, dass die universelle Gruppen-C*-Algebra und die reduzierte Gruppen-C*-Algebra von $\mathbb{F}_2$ nicht *-isomorph sind.