Übungen zur Vorlesung "Operatoralgebren II" **SoSe 2018**
Prof. Dr. T. de Laat **Blatt 1**

Abgabe: 20. April 2017, bis 10:00 Uhr in den Briefkasten (nur Aufgabe 3).

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe)

Sei G eine topologische Gruppe, und sei H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass auch $\overline{H}$ eine Untergruppe von G ist. Zeigen Sie, dass wenn H zusätzlich normal ist, dass dann auch $\overline{H}$ normal ist.

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe)

(a) Zeigen Sie, dass $\mu(A) = \int_A \frac{dx}{|\det(x)|^n}$, wobei dx das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^{n^2}$ ist, ein Haarmaß auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ unimodulär ist.

Sei H die Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R},\, y > 0 \right\}.$$

(c) Verifizieren Sie, mittels einer Berechnung, dass $I(f) = \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}\right) \frac{1}{y} dx dy$ ein linkes Haarintegral auf H definiert.

(d) Zeigen Sie, dass H nicht unimodulär ist. (Unimodularität geht also nicht über auf Untergruppen.)

Aufgabe 3

Sei Γ eine endliche (diskrete) Gruppe, und sei $C(\Gamma)$ die Menge der $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf Γ versehen mit der üblichen Faltung und Involution.

(a) Zeigen Sie, dass $C^*(\Gamma) = C^*_\lambda(\Gamma) = C(\Gamma)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi \in ZC(\Gamma)$ (Zentrum), genau dann wenn für alle $g, h \in \Gamma$ gilt: $\varphi(hgh^{-1}) = \varphi(g)$.

(c) Für $g \in \Gamma$, sei $C_g = \{hgh^{-1} \mid h \in \Gamma\}$ die Konjugationsklasse von g in Γ. Dann ist Γ (wie Sie wissen) die disjunkte Vereinigung seiner Konjugationsklassen. Zeigen Sie, dass $|\hat{\Gamma}| =$ Anzahl der Konjugationsklassen in Γ.

(d) Zeigen Sie, dass $|\Gamma| = \sum_{[\pi] \in \hat{\Gamma}} \dim(\mathcal{H}_\pi)^2$.