DIE SPUR AUF EINEM ENDLICHEN FAKTOR

HANNES THIEL

Dieser Artikel basiert auf der englischen Übersetzung durch Tim de Laat eines Manuskripts von Uffe Haagerup. Die Existenz und Eindeutigkeit des Spurzustand auf einem endlichen Faktor wurde zuerst von Murray und von Neumann gezeigt [MvN37, pp. 210-217]. In [Yea71] hat Yeadon einen kurzen Beweis der Existenz des Spurzustands mit Hilfe des Ryll-Nardzewski Fixpunktsatzes präsentiert. Der hier geführte Beweis folgt [Ped75].

Zur Erinnerung: Ein *Zustand* auf einer C^*-Algebra A ist ein positives Funktional $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ mit $\|\varphi\| = 1$. Ein Zustand φ heißt *treu* falls $\varphi(a) > 0$ für alle $a \in A_+\setminus\{0\}$. Eine *Spur* auf A ist ein positives Funktional $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$, so dass $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ für alle $x, y \in A$. Ein *Spurzustand* ist eine Spur die gleichzeitig ein Zustand ist.

Wir bezeichnen die Menge der Projektionen in A mit $\mathrm{Proj}(A)$. Es seien $p, q \in \mathrm{Proj}(A)$. Wir sagen, dass p und q (Murray-von Neumann) äquivalent sind, und schreiben $p \sim q$, falls es $v \in A$ gibt, so dass $p = v^*v$ und $vv^* = q$. Wir sagen, dass p (Murray-von Neumann) subäquivalent zu q ist, und schreiben $p \precsim q$, falls $p \sim q'$ für eine Projektion q' mit $q' \leq q$. Eine Projektion p heißt *endlich*, falls für jede Projektion q aus $p \sim q \leq p$ schon $p = q$ folgt.

Sei nun A eine unitale C^*-Algebra. Wir sagen, dass A *endlich* ist, falls die Eins in A eine endliche Projektion ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn jede Isometrie in A automatisch unitär ist.

Falls A einen treuen Spurzustand besitzt, dann ist A endlich. Um dies zu beweisen, sei $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ ein treuer Spurzustand, und es sei $v \in A$ eine Isometrie, das heißt, es gilt $v^*v = 1$. Wir setzen $p := vv^*$. Dann gilt $\varphi(p) = \varphi(vv^*) = \varphi(v^*v) = 1$. Es folgt $\varphi(1-p) = \varphi(1) - \varphi(p) = 0$, und damit $1 - p = 0$, also $p = 1$.

Wir werden zeigen, dass jeder endliche Faktor genau einen Spurzustand besitzt.

Eine C^*-Algebra A hat *reellen Rang Null* wenn die selbstadjungierten Operatoren mit endlichem Spektrum norm-dicht in A_{sa} sind; siehe [BP91, Theorem 2.6]. Jede von Neumann Algebra hat reellen Rang Null; siehe [BP91, Proposition 1.3]. (Sei M eine von Neumann Algebra und $a \in M_{\mathrm{sa}}$. Wir können $\|a\| \leq 1$ annehmen. Es sei $n \geq 1$. Wir betrachten nun die Projektionen $p_k := \chi_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(a)$, für $k = -n, \ldots, n-1$. Der Operator $b := \sum_k \frac{k}{n} p_k$ ist selbstadjungiert, hat endliches Spektrum und erfüllt $\|a - b\| \leq \frac{1}{n}$.)

Proposition 1. *Es sei A eine unitale C^*-Algebra, und $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ ein positives Funktional. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) Das Funktional φ ist eine Spur, das heißt, es gilt $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ für alle $x, y \in A$.
(2) Für alle $a \in A_{sa}$ und alle unitären $u \in A$ gilt $\varphi(uau^*) = \varphi(a)$.
(3) Für alle $x \in A$ gilt $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$.

Falls A reellen Rang Null hat, dann sind die obigen Aussagen auch äquivalent zu:

(4) Für alle äquivalenten Projektionen $p, q \in A$ gilt $\varphi(p) = \varphi(q)$.

Beweis. Wir beweisen die Äquivalenzen '(1)⇔(2)', '(1)⇔(3)', und die Implikationen '(3)⇒(4)' und '(4)⇒(2)'.

Date: 4 June 2018.

Um '(1)⇒(2)' zu zeigen, sei $a \in A_{\mathrm{sa}}$ und $u \in A$ unitär. Dann gilt

$$\varphi(u(au^*)) = \varphi((au^*)u) = \varphi(a).$$

Um '(2)⇒(1)' zu zeigen, seien $x, y \in A$. Es sei $u \in A$ unitär. Wir zeigen zuerst, dass $\varphi(uy) = \varphi(yu)$. Es seien $a, b \in A_{\mathrm{sa}}$ der Real- und Imaginärteil von yu. Dann gilt $yu = a + ib$ und es folgt

$$\varphi(uy) = \varphi(u(a+ib)u^*) = \varphi(uau^*) + i\varphi(ubu^*) = \varphi(a) + i\varphi(b) = \varphi(yu).$$

Jeder Operator in einer C^*-Algebra ist eine Linearkombination von vier unitären. Wir wählen unitäre $u_k \in A$ und $\lambda_k \in \mathbb{C}$, so dass $x = \sum_{k=1}^4 \lambda_k u_k$. Dann gilt

$$\varphi(xy) = \sum_{k=1}^4 \lambda_k \varphi(u_k y) = \sum_{k=1}^4 \lambda_k \varphi(y u_k) = \varphi(yx).$$

Die Implikation '(1)⇒(3)' ist trivial. Um die Umkehrung zu beweisen, seien $x, y \in A$. Setze $z := y^*$. Wir wenden die Polarisationsformel für xz^* an und erhalten

$$\begin{aligned}\varphi(xy) = \varphi(xz^*) &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^3 i^k \varphi\big((x+i^kz)(x+i^kz)^*\big) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^3 i^k \varphi\big((x+i^kz)^*(x+i^kz)\big) \\ &= \varphi(z^*x) = \varphi(yx).\end{aligned}$$

Die Implikation '(3)⇒(4)' ist trivial. Um die Implikation '(4)⇒(2)' zu beweisen, sei $a \in A_{\mathrm{sa}}$ und sei $u \in A$ unitär. Sei $\varepsilon > 0$. Da A reellen Rang Null hat, gibt es $b \in A_{\mathrm{sa}}$ mit endlichen Spektrum und $\|a - b\| < \varepsilon$. Da b endliches Spektrum hat, gibt es $\lambda_k \in \mathbb{R}$ und Projektionen p_k, so dass $b = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k$. Die Projektionen up_ku^* und p_k sind äquivalent. Es folgt

$$\varphi(ubu^*) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi(up_ku^*) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi(p_k) = \varphi(b).$$

Aus $\|a-b\| < \varepsilon$ folgt $|\varphi(a) - \varphi(b)| < \varepsilon$. Es gilt auch $\|uau^* - ubu^*\| < \varepsilon$ und daher $|\varphi(uau^*) - \varphi(ubu^*)| < \varepsilon$. Es folgt

$$|\varphi(a) - \varphi(uau^*)| \leq |\varphi(a) - \varphi(b)| + |\varphi(b) - \varphi(ubu^*)| + |\varphi(ubu^*) - \varphi(uau^*)| \leq 2\varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\varphi(a) = \varphi(uau^*)$. □

Die folgende Aussage kann ähnlich wie die Äquivalenz zwischen (1)-(3) und (4) in Proposition 1 bewiesen werden.

Proposition 2. *Es sei A eine unitale C^*-Algebra mit reellem Rang Null, es sei φ ein positives Funktional auf A, und es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \geq 1$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) Für alle $x \in A$ gilt $\varphi(x^*x) \leq \lambda\varphi(xx^*)$.
(2) Für alle äquivalenten Projektionen p und q in A gilt $\varphi(p) \leq \lambda\varphi(q)$.

Definition 3 ([CP79]). Es sei A eine C^*-Algebra, und $a, b \in A_+$. Wir sagen, dass a und b *Cuntz-Pedersen äquivalent* sind, und schreiben $a \sim_{\mathrm{CP}} b$, falls es eine Folge $(x_n)_n$ in A gibt, so dass

$$a = \sum_n x_n^* x_n, \quad \text{und} \quad \sum_n x_n x_n^* = b,$$

wobei die Summen norm-konvergent angenommen werden.

Lemma 4. *Es sei $\tau\colon A \to \mathbb{C}$ ein Spurzustand und $a, b \in A_+$ mit $a \sim_{CP} b$. Dann gilt $\tau(a) = \tau(b)$.*

Beweis. Wähle eine Folge $(x_n)_n$ in A, so dass $a = \sum_n x_n^* x_n$ und $\sum_n x_n x_n^* = b$. Wir benutzen, dass τ stetig ist, und erhalten

$$\tau(a) = \lim_{N\to\infty} \tau(\sum_{n=0}^{N} x_n^* x_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \tau(x_n^* x_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \tau(x_n x_n^*) = \tau(b). \quad \square$$

Lemma 5. *Es sei A eine C^*-Algebra, und es seien $x \in A$ und $e \in A_+$, so dass $x^*x \leq e$. Für $k \geq 1$ setzen wir $r_k := x(\frac{1}{k} + e)^{-1/4}$. Dann ist die Folge $(r_k)_k$ konvergent und für $r := \lim_k r_k$ gilt $x = re^{1/4}$. Falls $x^*x = e$, dann gilt $r^*r = e^{1/2}$.*

Beweis. Für $k, l \geq 1$ setzen wir $d_{k,l} := (\frac{1}{k} + e)^{-1/4} - (\frac{1}{l} + e)^{-1/4}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|r_k - r_l\|^2 &= \|xd_{k,l}\|^2 = \|d_{k,l}^* x^* x d_{k,l}\| \leq \|d_{k,l}^* e d_{k,l}\| = \|e^{1/2} d_{k,l}\|^2 \\ &= \|e^{1/2}(\tfrac{1}{k} + e)^{-1/4} - e^{1/2}(\tfrac{1}{l} + e)^{-1/4}\|^2. \end{aligned}$$

Die Folge von Funktionen $(t \mapsto t^{1/2}(\frac{1}{k} + t)^{-1/4})$ ist aufsteigend und konvergiert daher nach Dini's Theorem gleichmäßig gegen die Funktion $(t \mapsto t^{1/4})$. Es folgt, dass $(r_k)_k$ eine Cauchyfolge ist. Für $k \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \|x - r_k e^{1/4}\|^2 &= \|x(1 - (\tfrac{1}{k} + e)^{-1/4} e^{1/4})\|^2 \\ &= \|(1 - (\tfrac{1}{k} + e)^{-1/4} e^{1/4}) x^* x (1 - (\tfrac{1}{k} + e)^{-1/4} e^{1/4})\| \\ &\leq \|(1 - (\tfrac{1}{k} + e)^{-1/4} e^{1/4}) e (1 - (\tfrac{1}{k} + e)^{-1/4} e^{1/4})\| \\ &= \|e^{1/2}(1 - (\tfrac{1}{k} + e)^{-1/4} e^{1/4})\| \xrightarrow{k\to\infty} 0, \end{aligned}$$

und daher $x = re^{1/4}$.

Falls $x^*x = e$, dann gilt

$$r^*r = \lim_k (\tfrac{1}{k} + e)^{-1/4} x^* x (\tfrac{1}{k} + e)^{-1/4} = \lim_k (\tfrac{1}{k} + e)^{-1/4} e (\tfrac{1}{k} + e)^{-1/4} = e^{1/2}. \quad \square$$

Es sei $x^*x \leq e$. Der Operator r aus dem vorherigen Resultat ist ein kanonischer Operator der die Gleichung $x = re^{1/4}$ erfllt. Man kann sich r als $xe^{-1/4}$ definiert vorstellen, obwohl im allgemeinen e nicht invertierbar ist.

Lemma 6. *Es sei A eine C^*-Algebra, und es seien $(x_m)_m$ eine Folge in A und $e \in A_+$, so dass $\sum_{m=1}^{\infty} x_m^* x_m = e$. Für $m \geq 1$ setze $r_m := \lim_k x_m(\frac{1}{k} + e)^{-1/4}$. Dann gilt $\sum_{m=1}^{\infty} r_m^* r_m = e^{1/2}$.*

Beweis. Wir betrachten die C^*-Algebra $B := A \otimes \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ die kompakten Operatoren auf dem Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ sind. Wir bezeichnen die Matrixeinheiten in $\mathbb{K}$ mit $p_{i,j}$ für $i, j \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$x := \sum_{m=1}^{\infty} x_m \otimes p_{m,1} \in B.$$

Dann gilt $x^*x = e \otimes p_{1,1}$. Wir definieren

$$t_k := x(\tfrac{1}{k} + e \otimes p_{1,1})^{-1/4} \in B.$$

Wegen Lemma 5 konvergiert die Folge $(t_k)_k$ in B gegen ein Element $t \in B$, so dass $t^*t = (e \otimes p_{1,1})^{1/2}$. Wir folgern

$$t^*t = (e \otimes p_{1,1})^{1/2} = e^{1/2} \otimes p_{1,1}.$$

Es gilt $t_k = \sum_{m=1}^\infty x_m(\frac{1}{k}+e)^{-1/4}\otimes p_{m,1}$ und daher $t = \sum_{m=1}^\infty r_m\otimes p_{m,1}$ und folglich

$$t^*t = (\sum_{m=1}^\infty r_m^* r_m)\otimes p_{1,1}.$$

Es folgt, dass $\sum_{m=1}^\infty r_m^* r_m = e^{1/2}$. □

Lemma 7 ([Ped69, Proposition 1.1]). *Es sei A eine C^*-Algebra, und es seien $(x_m)_m$ und $(y_n)_n$ Folgen in A, so dass*

$$\sum_{m=1}^\infty x_m x_m^* = \sum_{n=1}^\infty y_n^* y_n.$$

Wir setzen $e := \sum_{m=1}^\infty x_m x_m^*$. Wir definieren $r_m := \lim_k x_m(\frac{1}{k}+e)^{-1/4}$ und $s_n := \lim_k(\frac{1}{k}+e)^{-1/4}y_n$ und $z_{m,n} := s_n r_m$ für $m,n\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$x_m^* x_m = \sum_{n=1}^\infty z_{m,n}^* z_{m,n}, \quad \textit{und} \quad \sum_{m=1}^\infty z_{m,n} z_{m,n}^* = y_n y_n^*,$$

für alle m,n.

Beweis. Wir wenden im dritten Schritt Lemma 6 an, und erhalten

$$\sum_{n=1}^\infty z_{m,n}^* z_{m,n} = \sum_{n=1}^\infty r_m^* s_n^* s_n r_m = r_m^* \left(\sum_{n=1}^\infty s_n^* s_n\right) r_m = r_m^* e r_m = x_m^* x_m.$$

Analog folgt

$$\sum_{m=1}^\infty z_{m,n} z_{m,n}^* = \sum_{m=1}^\infty s_n r_m r_m^* s_n^* = s_n \left(\sum_{m=1}^\infty r_m r_m^*\right) s_n^* = s_n e s_n^* = y_n y_n^*.$$ □

Proposition 8. *Die Cuntz-Pedersen Relation hat folgende Eigenschaften:*

(1) *Die Relation $\sim_{CP}$ ist eine Äquivalenzrelation.*
(2) *Es seien $a_1, a_2, b\in A_+$, so dass $a_1+a_2\sim_{CP} b$. Dann existieren $b_1, b_2\in A_+$, so dass $a_1\sim_{CP} b_1$, $a_2\sim_{CP} b_2$ und $b_1+b_2=b$.*

Beweis. (1). Es ist einfach zu sehen, dass $\sim_{\mathrm{CP}}$ reflexiv und symmetrisch ist. Um zu zeigen, dass $\sim_{\mathrm{CP}}$ transitiv ist, seien $a,b,c\in A_+$, so dass $a\sim_{\mathrm{CP}} b\sim_{\mathrm{CP}} c$. Wähle Folgen $(x_m)_m$ und $(y_n)_n$, so dass

$$a = \sum_{m=1}^\infty x_m^* x_m, \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^\infty x_m x_m^* = b = \sum_{n=1}^\infty y_n^* y_n, \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^\infty y_n y_n^* = c.$$

Wir wenden Lemma 7 an und erhalten $z_{m,n}\in A$ für $m,n\geq 1$, so dass

$$x_m^* x_m = \sum_{n=1}^\infty z_{m,n}^* z_{m,n}, \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^\infty z_{m,n} z_{m,n}^* = y_n y_n^*,$$

für alle m und n. Es folgt

$$a = \sum_{m=1}^\infty x_m^* x_m = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty z_{m,n}^* z_{m,n}, \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty z_{m,n} z_{m,n}^* = \sum_{n=1}^\infty y_n y_n^* = c,$$

und daher $a\sim_{\mathrm{CP}} c$.

(2). Es seien $a_1, a_2, b\in A_+$, so dass $a_1+a_2\sim_{\mathrm{CP}} b$. Wir setzen $x_1 := a_1^{1/2}$, $x_2 := a_2^{1/2}$ und $x_m := 0$ für $m\geq 3$. Wir wählen eine Folge $(y_n)_n$, so dass

$$a_1+a_2 = \sum_{n=1}^\infty y_n^* y_n, \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^\infty y_n y_n^* = b.$$

Dann gilt
$$\sum_{m=1}^{\infty} x_m x_m^* = x_1 x_1^* + x_2 x_2^* = a_1 + a_2 = a = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^* y_n.$$
Wir wenden Lemma 7 an und erhalten $z_{m,n} \in A$ für $m, n \geq 1$, so dass
$$x_m^* x_m = \sum_{n=1}^{\infty} z_{m,n}^* z_{m,n}, \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} z_{m,n} z_{m,n}^* = y_n y_n^*,$$
für alle m und n. Wir setzen
$$b_1 := \sum_{n=1}^{\infty} z_{1,n} z_{1,n}^*, \quad \text{und} \quad b_2 := \sum_{n=1}^{\infty} z_{2,n} z_{2,n}^*.$$
Es gilt $z_{m,n} = 0$ für $m \geq 3$, und daher
$$b = \sum_{n=1}^{\infty} y_n y_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} z_{m,n} z_{m,n}^* = (\sum_{n=1}^{\infty} z_{1,n} z_{1,n}^*) + (\sum_{n=1}^{\infty} z_{2,n} z_{2,n}^*) = b_1 + b_2.$$
Es gilt außerdem
$$a_1 = x_1^* x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} z_{1,n}^* z_{1,n}, \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_{1,n} z_{1,n}^* = b_1,$$
und daher $a_1 \sim_{\mathrm{CP}} b_1$. Analog gilt $a_2 \sim_{\mathrm{CP}} b_2$. □

Proposition 9. *Es sei A eine C^*-Algebra, es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \geq 1$, und es sei φ ein positives Funktional auf A, so dass $\varphi(x^*x) \leq \lambda\varphi(xx^*)$ für alle $x \in A$. Dann existiert eine Spur τ auf A, so dass*
$$\varphi(a) \leq \tau(a) \leq \lambda\varphi(a)$$
für alle $a \in A_+$.

Beweis. Definiere $\tau\colon A_+ \to [0, \infty]$ durch
$$\tau(a) := \sup\left\{\varphi(b) : b \in A_+, b \sim_{\mathrm{CP}} a\right\},$$
für $a \in A_+$. Dann gilt $\tau(a) \geq \varphi(a)$ für alle $a \in A_+$. Es sei $b \in A_+$ mit $b \sim_{\mathrm{CP}} a$. Wähle eine Folge $(x_n)_n$, so dass
$$b = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* x_n, \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n x_n^* = a.$$
Dann gilt
$$\varphi(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n^* x_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\varphi(x_n x_n^*) = \lambda\varphi(a).$$
Dies zeigt, dass
$$\varphi(a) \leq \tau(a) \leq \lambda\varphi(a),$$
für alle $a \in A_+$. Insbesondere gilt $\tau(a) < \infty$ für alle $a \in A_+$.

Für $\mu \in (0, \infty)$ und $a, b \in A_+$ sieht man leicht, dass $\mu a \sim_{\mathrm{CP}} \mu b$ genau dann gilt, wenn $a \sim_{\mathrm{CP}} b$. Es folgt, dass
$$\tau(\mu a) = \mu\tau(a),$$
für alle $a \in A_+$ und $\mu \in (0, \infty)$.

Es seien $a_1, a_2 \in A_+$. Da $b_1 \sim_{\mathrm{CP}} a_1$ und $b_2 \sim_{\mathrm{CP}} a_2$ implizieren, dass $b_1 + b_2 \sim_{\mathrm{CP}} a_1 + a_2$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\tau(a_1 + a_2) &= \sup\big\{\varphi(b) : b \sim_{\mathrm{CP}} a_1 + a_2\big\}\\ &\geq \sup\big\{\varphi(b_1 + b_2) : b_1 \sim_{\mathrm{CP}} a_1,\, b_2 \sim_{\mathrm{CP}} a_2\big\}\\ &= \sup\big\{\varphi(b_1) : b_1 \sim_{\mathrm{CP}} a_1\big\} + \sup\big\{\varphi(b_2) : b_2 \sim_{\mathrm{CP}} a_2\big\}\\ &= \tau(a_1) + \tau(a_2).\end{aligned}$$

Falls $b \sim_{\mathrm{CP}} a_1 + a_2$, dann folgt aus Proposition 8, dass es $b_1, b_2 \in A_+$ gibt, so dass $b_1 \sim_{\mathrm{CP}} a_1$ und $b_2 \sim_{\mathrm{CP}} a_2$, and $b = b_1 + b_2$. Daher haben wir auch

$$\sup\big\{\varphi(b) : b \sim_{\mathrm{CP}} a_1 + a_2\big\} \leq \sup\big\{\varphi(b_1 + b_2) : b_1 \sim_{\mathrm{CP}} a_1, b_2 \sim_{\mathrm{CP}} a_2\big\}.$$

Für alle $a_1, a_2 \in A_+$ gilt also

$$\tau(a_1 + a_2) = \tau(a_1) + \tau(a_2).$$

Es sei $x \in A$. Dann gilt $x^*x \sim_{\mathrm{CP}} xx^*$. Da $\sim_{\mathrm{CP}}$ transitiv ist, folgt

$$\tau(x^*x) = \sup\big\{\varphi(b) : b \sim_{\mathrm{CP}} x^*x\big\} = \sup\big\{\varphi(b) : b \sim_{\mathrm{CP}} xx^*\big\} = \tau(xx^*).$$

Für $a \in A_{\mathrm{sa}}$ seien a_+ und a_- der positive und negative Teil. (Es gilt $a_+ = f(a)$ und $a_- = g(a)$ mit Funktionalkalkül angewendet für die Funktionen $f(t) = \max\{t, 0\}$ und $g(t) = \min\{t, 0\}$.) Es gilt $a = a_+ - a_-$, und $a_+, a_- \in A_+$. Wir setzen nun τ auf A_{sa} fort, in dem wir für $a \in A_{\mathrm{sa}}$ definieren:

$$\tau(a) := \tau(a_+) - \tau(a_-).$$

Es seien $a, b \in A_{\mathrm{sa}}$. Dann gilt $(a+b)_+ - (a+b)_- = a+b = (a_+ - a_-) + (b_+ - b_-)$. Es folgt $(a+b)_+ + a_- + b_- = (a+b)_- + a_+ + b_+$. Da τ auf A_+ additiv ist, erhalten wir

$$\tau\big((a+b)_+\big) + \tau(a_-) + \tau(b_-) = \tau\big((a+b)_-\big) + \tau(a_+) + \tau(b_+).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\tau(a+b) &= \tau\big((a+b)_+\big) - \tau\big((a+b)_-\big)\\ &= \tau(a_+) - \tau(a_-) + \tau(b_+) - \tau(b_-)\\ &= \tau(a) + \tau(b).\end{aligned}$$

Es sei $a \in A_{\mathrm{sa}}$. Für $\mu \in (0, \infty)$ gilt $(\mu a)_+ = \mu a_+$ und $(\mu a)_- = \mu a_-$, und daher $\tau(\mu a) = \mu\tau(a)$. Analog gilt für $\mu \in (-\infty, 0)$, dass $(\mu a)_+ = (-\mu)a_-$ und $(\mu a)_- = (-\mu)a_+$, und daher $\tau(\mu a) = \mu\tau(a)$. Es gilt weiterhin $\tau(0) = 0$, und daher $\tau(0a) = 0\tau(a)$. Es folgt, dass τ ein reelles, lineares Funktional auf A_{sa} ist.

Wir setzen nun τ auf A fort. Es sei $x \in A$. Es seien a und b der Real- und Imaginärteil von x. (Das heißt, $a := \frac{1}{2}(x + x^*)$ und $b := \frac{1}{2i}(x - x^*)$.) Wir definieren

$$\tau(x) := \tau(a) + i\tau(b).$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass τ ein (komplex) lineares Funktional auf A ist. Es ist klar, dass τ positiv ist. Wir haben außerdem $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$ für alle $x \in A$, was mit Proposition 1 zeigt, dass τ eine Spur ist. Wir haben weiterhin, dass $\varphi(a) \leq \tau(a) \leq \lambda\varphi(a)$ für alle $a \in A_+$. □

Bemerkung 10. Es seien φ und τ wie in Proposition 9. Falls φ treu ist, dann gilt dies offenbar auch für τ. Es gilt weiterhin, dass τ normal ist, falls φ normal ist. Um dies zu sehen, sei $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ ein aufsteigendes Netz in A_+, welches schwach gegen $a \in A_+$ konvergiert. Dann gilt $0 \leq \tau(a - a_i) \leq \lambda\varphi(a - a_i)$ für alle $i \in \mathcal{I}$. Falls φ normal ist, dann geht die rechte Seite der vorherigen Ungleichung gegen Null. Dies impliziert, dass $\lim_i \tau(a_i) = \tau(a)$, das heißt, τ ist normal.

Die Projektion e in der folgenden Proposition wird die **Trägerprojektion** von φ genannt.

Proposition 11. *Es sei M eine von Neumann Algebra, und es sei φ ein positives, normales Functional auf M. Es bezeichne e das Infimum der Menge der Projektionen $e' \in \mathrm{Proj}(M)$ für die $\varphi(1-e') = 0$ gilt. Dann haben wir:*

(1) $\varphi(1-e) = 0$,
(2) φ ist ein treues Funktional auf der Algebra eMe.

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{p \in \mathrm{Proj}(M) : \varphi(p) = 0\}.$$

Dann gilt $e = \bigwedge_{p\in\mathcal{F}}(1-p) = 1 - \bigvee_{p\in\mathcal{F}} p$.

Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{F}$ abgeschlossen unter Suprema ist. Seien also $p_1, p_2 \in \mathcal{F}$. Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, so dass $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Die Projektion $p_1 \vee p_2$ ist genau die Trägerprojektion von $p_1 + p_2$, denn für $h \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned} h \in \mathrm{Ker}(p_1+p_2) &\Leftrightarrow (p_1+p_2)(h) = 0 \\ &\Leftrightarrow (p_1+p_2)^{\frac{1}{2}}(h) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle (p_1+p_2)h, h\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle p_1(h), h\rangle = \langle p_2(h), h\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow p_1(h) = 0 \text{ und } p_2(h) = 0 \\ &\Leftrightarrow h \in p_1(\mathcal{H})^\perp \cap p_2(\mathcal{H})^\perp = (p_1 \vee p_2)(\mathcal{H})^\perp. \end{aligned}$$

Da $p_1 + p_2$ positiv ist, gilt

$$\mathrm{supp}(p_1+p_2) = \chi_{(0,\infty)}(p_1+p_2) = \mathrm{SOT-}\lim_{n\to\infty} \chi_{[\frac{1}{n},\infty)}(p_1+p_2).$$

Sei $n \geq 1$. Dann gilt $\chi_{[\frac{1}{n},\infty)}(t) \leq nt$ für $t \geq 0$, und daher

$$\chi_{[\frac{1}{n},\infty)}(p_1+p_2) \leq n(p_1+p_2).$$

Es folgt

$$\varphi(\chi_{[\frac{1}{n},\infty)}(p_1+p_2)) \leq n(\varphi(p_1)+\varphi(p_2)) = 0,$$

da $p_1, p_2 \in \mathcal{F}$. Da φ normal ist, erhalten wir $\varphi(\chi_{(0,\infty)}(p_1+p_2)) = 0$. Dies zeigt, dass $\varphi(p_1 \vee p_2) = 0$ und daher $p_1 \vee p_2 \in \mathcal{F}$.

Die Menge $\mathcal{F}$ ist also eine aufsteigende Menge von Projektionen in M. Da φ normal ist, erhalten wir

$$\varphi\left(\bigvee_{p\in\mathcal{F}} p\right) = \sup_{p\in\mathcal{F}} \varphi(p) = 0.$$

Dies beweist die erste Behauptung.

Um zu zeigen, dass φ auf eMe treu ist, sei $a \in (eMe)_+$ mit $a \neq 0$. Wir zeigen, dass $\varphi(a) > 0$. Da $a \neq 0$, gilt auch $\mathrm{supp}(a) \neq 0$. Wir haben $\mathrm{supp}(a) = \mathrm{SOT-}\lim_{n\to\infty} \chi_{[\frac{1}{n},\infty)}(a)$. Es gibt daher $n \in \mathbb{N}$, so dass $\chi_{[\frac{1}{n},\infty)}(a) \neq 0$. Nach Definition ist e orthogonal zu jeder Projektion f mit $\varphi(f) = 0$. Es gilt $\chi_{[\frac{1}{n},\infty)}(a) \leq \mathrm{supp}(a) \leq e$, weshalb $\chi_{[\frac{1}{n},\infty)}(a)$ nicht orthogonal zu e ist. Daraus folgt wiederum $\varphi(\chi_{[\frac{1}{n},\infty)}(a)) > 0$. Wir folgern

$$\varphi(a) \geq \varphi\left(\frac{1}{n}\chi_{[\frac{1}{n},\infty)}(a)\right) > 0.$$

Also ist φ auf eMe treu. □

Lemma 12. *Es sei M ein endlicher Faktor, und es seien $p, q \in \mathrm{Proj}(M)$ mit $p \sim q$. Dann gilt $1-p \sim 1-q$.*

Beweis. Da M ein Faktor ist, gilt $1-p \precsim 1-q$ oder $1-q \precsim 1-p$; siehe [Zhu93, Section 25.3]. Wegen Symmetrie genügt es einen der Fälle zu betrachten. Wir nehmen also an, dass $1-p \precsim 1-q$. Wähle $q' \in \mathrm{Proj}(M)$ mit $1-p \sim q' \leq 1-q$. Nach [Zhu93, Exercise 24.1] ist $\sim$ additiv, und wir folgern

$$1 = p + (1-p) \sim q + q'.$$

Da 1 eine endliche Projektion ist, folgt $1 = q + q'$ und damit $q' = 1-q$. Also gilt $1-p \sim q' = 1-q$. □

Lemma 13. *Es sei M ein endlicher Faktor, und es sei φ ein normales, treues, positives Funktional auf M. Dann existieren $e \in \mathrm{Proj}(M)$ mit $e \neq 0$ und $\lambda \in [1,\infty)$, so dass*

$$\varphi(x^*x) \leq \lambda\varphi(xx^*)$$

für alle $x \in eMe$.

Beweis. Wir wenden das Lemma von Zorn an um eine maximale Familie $(p_i, q_i)_{i\in\mathcal{I}}$ von Paaren von Projektionen in M zu finden, so dass gilt:

(1) Die Projektionen p_i sind paarweise orthogonal,
(2) Die Projektionen q_i sind paarweise orthogonal,
(3) Es gilt $p_i \sim q_i$ für alle $i \in \mathcal{I}$.
(4) Es gilt $\varphi(p_i) > \varphi(q_i)$ für alle $i \in \mathcal{I}$.

Die dritte und vierte Bedingung implizieren, dass $p_i \neq 0$ und $q_i \neq 0$ für alle $i \in \mathcal{I}$. Wir setzen $p = \sum_{i\in\mathcal{I}} p_i$ und $q = \sum_{i\in\mathcal{I}} q_i$. Dann gilt $p \sim q$. Falls $\mathcal{I} \neq \emptyset$, dann gilt $\varphi(p) > \varphi(q)$, was wiederum impliziert, dass $1-q \neq 0$. Falls $\mathcal{I} = \emptyset$, dann gilt auch $1-q \neq 0$. In jedem Fall ist also $1-q \neq 0$.

Aus Lemma 12 folgt, dass $1-p \sim 1-q$. Es gilt also auch $1-p \neq 0$. Da φ treu ist, gilt $\varphi(1-p) > 0$. Wir setzen

$$\lambda := \frac{\varphi(1-q)}{\varphi(1-p)}.$$

Wir wenden das Lemma von Zorn erneut an um eine maximale Familie $(r_j, s_j)_{j\in\mathcal{J}}$ von Paaren von Projektionen in M zu erhalten, so dass gilt:

(1) Die Projektionen r_j sind paarweise orthogonal and es gilt $r_j \leq 1-p$ für alle $j \in \mathcal{J}$.
(2) Die Projektionen s_j sind paarweise orthogonal and es gilt $s_j \leq 1-q$ für alle $j \in \mathcal{J}$,
(3) Es gilt $r_j \sim s_j$ für alle $j \in \mathcal{J}$.
(4) Es gilt $\lambda\varphi(r_j) < \varphi(s_j)$ für alle $j \in \mathcal{J}$.

Die dritte und vierte Bedingung implizieren, dass $r_j \neq 0$ und $s_j \neq 0$ für alle $j \in \mathcal{J}$. Wir setzen $r := \sum_{j\in\mathcal{J}} r_j$ und $s = \sum_{j\in\mathcal{J}} s_j$. Dann gilt $r \leq 1-p$ und $s \leq 1-q$, und $r \sim s$. Falls $\mathcal{J} \neq \emptyset$, dann gilt $\lambda\varphi(r) < \varphi(s)$, was wiederum impliziert, dass

$$\begin{aligned}\varphi(1-q-s) &= \lambda\varphi(1-p) - \varphi(s)\\ &< \lambda\varphi(1-p-r).\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $1-p-r \neq 0$. Fals $\mathcal{J} = \emptyset$, dann gilt auch $1-p-r \neq 0$. In jedem Fall gilt also $1-p-r \neq 0$.

Aus Lemma 12 folgt, dass

$$1-q-s \sim 1-p-r.$$

Es folgt $1-q-s \neq 0$. Wir setzen nun

$$e := 1-p-r, \qquad f := 1-q-s.$$

Dann gilt $e \sim f$.

Es seien $e', f' \in \mathrm{Proj}(M)$ mit $e' \leq e$, $f' \leq f$, und $e' \sim f'$. Aus der Maximalität von $(p_i, q_i)_{i \in \mathcal{I}}$ erhalten wir

$$\varphi(e') \leq \varphi(f'). \tag{1}$$

(Andernfalls könnte die Familie $(p_i, q_i)_{i \in \mathcal{I}}$ durch das Paar (e', f') erweitert werden.)

Analog, falls $e'', f' \in \mathrm{Proj}(M)$ mit $e'' \leq e$, $f' \leq f$, und $e'' \sim f'$, dann erhalten wir aus der Maximalität von $(r_j, s_j)_{j \in \mathcal{J}}$, dass

$$\lambda\varphi(e'') \geq \varphi(f'). \tag{2}$$

Es seien nun e' und e'' Projektionen in eMe, so dass $e' \sim e''$. Da $e \sim f$, können wir eine partielle Isometrie $v \in M$ finden, so dass $e = v^*v$ und $f = vv^*$. Wir setzen $f' := ve'v^*$. Da $e' \leq e$, erhalten wir

$$(f')^2 = (ve'v^*)^2 = ve'ee'v^* = ve'v^*.$$

Also ist f' eine Projektion und $f' \leq vv^* = f$. Weiterhin gilt $f' \sim e'$, da $f' = (ve')(ve')^*$ und $e' = (ve')^*ve'$. Wegen der Transitivität von $\sim$ erhalten wir $f' \sim e''$. Aus (1) und (2) erhalten wir

$$\varphi(e') \leq \varphi(f') \leq \lambda\varphi(e'').$$

Dies zeigt, dass die Einschränkung von φ auf eMe die zweite Bedinung von Proposition 2 erfüllt. Folglich gilt auch die erste Aussage, das heißt, es gilt $\varphi(x^*x) \leq \lambda\varphi(xx^*)$ für alle $x \in eMe$. $\square$

Proposition 14. *Es sei M ein endlicher Faktor. Dann besitzt M mindestens einen normalen Spurzustand.*

Beweis. Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, so dass $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Es sei $h \in \mathcal{H}$ ein Einsvektor. Definiere $\varphi(x) = \langle xh, h\rangle$ für $x \in A$. Dann ist φ ein normaler Zustand auf A. Es sei e die Trägerprojektion von φ. (Siehe Proposition 11.) Da φ ein treuer, normaler Zustand auf eMe ist, und da eMe ein endlicher Faktor ist, erhalten wir durch Lemma 13 eine Projektion $f \neq 0$ in eMe und $\lambda \geq 1$, so dass

$$\varphi(x^*x) \leq \lambda\varphi(xx^*)$$

für alle $x \in fMf$. Da φ treu auf eMe ist, gilt $\varphi(f) \neq 0$. Durch Proposition 9 erhalten wir eine Spur τ_0 auf fMf, so dass

$$\varphi(a) \leq \tau_0(a) \leq \lambda\varphi(a)$$

für alle $a \in (fMf)_+$. Insbesondere gilt $\tau_0(f) \neq 0$, und nach Bemerkung 10 ist τ_0 treu und normal auf fMf. Wir wählen nun eine maximale Familie $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Projektionen in A, so dass gilt:

(1) Die Projektionen f_i sind paarweise orthogonal.
(2) Es gilt $f_i \sim f$ für alle $i \in \mathcal{I}$.

Falls $\mathcal{I}$ eine unendliche Menge ist, dann können wir eine Folge $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von verschiedenen Elementen in $\mathcal{I}$ wählen. Da $f_{i_1} \sim f_{i_2}$, $f_{i_2} \sim f_{i_3}$, $f_{i_3} \sim f_{i_4}$, …, erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{i_n} \sim \sum_{i=2}^{\infty} f_{i_n}$$

was im Widerspruch dazu steht, dass alle Projektionen in einer endlichen von Neumann Algebra endlich sind. Also ist $\mathcal{I}$ endlich. Wir können daher annehmen, dass $I = \{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $f_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n} f_i$. Wegen [Zhu93, Section 25.3] gilt $f \prec f_{n+1}$ oder $f_{n+1} \prec f$. Falls $f \prec f_{n+1}$, dann können wir eine Projektion g finden, so dass $g \leq f_{n+1}$ und $g \sim f$, was der Maximalität von $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ widerspricht. Es gilt also $f_{n+1} \prec f$. Wir wählen partielle Isometrien $v_1, \ldots, v_{n+1} \in A$, so dass

$$v_k^* v_k = f, \qquad v_k v_k^* = f_k, \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

und

$$v_{n+1}^* v_{n+1} \leq f, \qquad v_{n+1} v_{n+1}^* = f_{n+1}.$$

Wir definieren

$$\tau(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \tau_0(v_k^* x v_k)$$

für $x \in M$. Die Funktion τ ist wohldefiniert, da $v_k^* x v_k \in fMf$ für alle $k = 1, \ldots, n+1$. Es ist leicht zu sehen, dass τ ein lineares Funktional auf M ist, und dass

$$\tau(1) = \sum_{k=1}^{n+1} \tau_0(v_k^* v_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \tau_0(v_k^* v_k) = n\tau_0(f) > 0.$$

Es sei $x \in M$. Da $\sum_{k=1}^{n+1} v_k v_k^* = \sum_{k=1}^{n+1} f_i = I$, erhalten wir

$$\tau(x^*x) = \sum_{k=1}^{n+1} \tau_0\big(v_k^* x^* x v_k\big) = \sum_{k,l=1}^{n+1} \tau_0\big(v_k^* x^* v_l v_l^* x v_k\big)$$

und

$$\tau(xx^*) = \sum_{l=1}^{n+1} \tau_0\big(v_l^* x x^* v_l\big) = \sum_{k,l=1}^{n+1} \tau_0\big(v_l^* x v_k v_k^* x^* v_l\big).$$

Da $v_l^* x v_k$ und $v_k^* x^* v_l$ Elemente in fMf sind, und τ_0 eine Spur auf fMf ist, folgern wir $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$. Mit Proposition 1 folgt, dass τ eine Spur auf M ist.

Um zu zeigen, dass τ normal ist, sei $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein aufsteigendes Netz positiver Element in M mit Supremum a. Für jedes $k = 1, \ldots, n+1$ ist das Netz $(v_k^* a_\lambda v_k)_{\lambda\in\Lambda}$ aufsteigend mit Supremum $v_k^* a v_k$. Da τ_0 normal ist, erhalten wir

$$\tau(a) = \lim_\lambda \sum_{k=1}^{n+1} \tau_0(v_k^* a_\lambda v_k) = \lim_\lambda \tau(a_\lambda).$$

Die Spur τ ist nicht notwendigerweise ein Zustand auf M. Wir setzen daher

$$\tau'(x) := \frac{\tau(x)}{\tau(1)}$$

für $x \in M$. Dann ist τ' ein normaler Spurzustand auf M. □

Proposition 15. *Es sei M ein endlicher Faktor und τ eine Spurzustand auf M. Dann ist τ treu.*

Beweis. Es sei $a \in M_+$ mit $a \neq 0$. Wir können $n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass die Projektion $f := \chi_{[\frac{1}{n},\infty)}(a)$ nicht verschwindet. Wir haben $f \leq na$. Es genügt daher zu zeigen, dass $\tau(f) \neq 0$.

Da $f \neq 0$, können wir wie im Beweis von Proposition 14 endliche viele paarweise orthogonale Projektionen $f_1, \ldots, f_{n+1}$ in M finden, so dass $f_k \sim f$ für $k = 1, \ldots, n$, $f_{n+1} \precsim f$, und $\sum_{k=1}^{n+1} f_i = 1$. Da τ eine Spur ist, gilt $\tau(f) = \tau(f_1) = \ldots = \tau(f_n) \geq \tau(f_{n+1})$. Wir folgern

$$\tau(1) = \tau\left(\sum_{k=1}^{n+1} f_k\right) \leq (n+1)\tau(f).$$

Da τ eine Zustand ist, gilt $\tau(1) = 1$ und folglich $\tau(f) \geq \frac{1}{n+1}$. Also gilt $\tau(f) \neq 0$. □

Lemma 16. *Es sei M eine von Neumann Algebra ohne Typ* I *Summanden, und sei $e \in \mathrm{Proj}(M)$. Dann existieren orthogonale Projektionen $p, q \in \mathrm{Proj}(M)$, so dass $e = p + q$ und $p \sim q$.*

Beweis. Wir wählen eine maximale Familie $(p_i, q_i)_{i\in\mathcal{I}}$ von Paaren von nichtverschwindenden Projektionen, so dass gilt:

(1) Die Projektionen p_i sind paarweise orthogonal.
(2) Die Projektionen q_i sind paarweise orthogonal.
(3) Es gilt $p_i \perp q_i$, $p_i \sim q_i$ und $p_i, q_i \leq e$ für alle $i \in \mathcal{I}$.

Wir setzen $p := \sum_{i\in\mathcal{I}} p_i$ und $q := \sum_{i\in\mathcal{I}} q_i$. Mit [Zhu93, Exercise 24.1] erhalten wir $p \sim q$. Außerdem gilt $p \perp q$, und $p, q \leq e$. Es folgt $p + q \leq e$.

Angenommen, es gilt $p+q < e$. Wir setzen $f := e-p-q$. Dann ist $f \neq 0$. Da M keine Typ I Summanden hat, enthält M keine abelschen Projektionen. Insbesondere ist f nicht abelsch. Daher ist das Zentrum $\mathcal{Z}(fMf)$ von fMf eine echte Teilmenge von fMf. Da jede von Neumann Algebra der Norm-Abschluss der linearen Hülle ihrer Projektionen ist, gibt es eine nichtverschwindende, nicht-zentrale Projektion $r \in fMf$. Es seien c_r and c_{f-r} die zentralen Träger von r und $f - r$ in fMf. Falls $c_r c_{f-r} = 0$, dann benutzen wir $r \leq c_r$ and $f - r \leq c_{f-r}$ um zu folgern, dass

$$c_r = c_r f = c_r r + c_r(f - r) = r + c_r c_{f-r}(f - r) = r.$$

Also gilt $c_r = r$, was im Widerspruch dazu steht, dass r keine zentrale Projektion ist. Also gilt $c_r c_{f-r} \neq 0$. Nach [Zhu93, Theorem 24.7] gibt es daher Projektionen p_0, q_0 in fMf, so dass

$$0 < p_0 \leq r, \qquad 0 < q_0 \leq f - r$$

und $p_0 \sim q_0$. Die gleichen Aussagen gelten auch, wenn wir p_0 und q_0 als Projektionen in M betrachten. Dies steht nun im Widerspruch zur Maximalität von $(p_i, q_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Also gilt $e = p+q$, was zeigt, dass p und q die gewünschten Eigenschaften haben. □

Theorem 17. *Es sei M ein endlicher Faktor. Dann besitzt M genau einen Spurzustand τ. Dieser Spurzustand ist normal und treu.*

Beweis. Ein endlicher Faktor ist entweder von Typ I_n für ein $n \in \mathbb{N}$ oder von Typ II_1. Falls M von Typ I_n ist, dann ist M isomorph zu $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$, wobei $\mathcal{H}_n$ ein n-dimensionaler Hilbertaum ist Das heißt, es gilt $M \cong M_n(\mathbb{C})$. Wir bezeichnen die natürliche (nicht normalisierte) Spur auf $M_n(\mathbb{C})$ mit tr, und wir setzen

$$\tau = \frac{1}{n}\mathrm{tr}.$$

Dann ist τ ein normaler, treuer Spurzustand auf M. Es sei τ' ein weiterer Spurzustand auf M. Zwei Projektionen $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ sind genau dann äquivalent, wenn sie die gleiche Dimension haben. Da 1 die Summe von n eindimensionalen Projektionen ist, erhalten wir $\tau'(p) = \frac{1}{n}$ für jede eindimensionale Projektion. Jede k-dimensionale Projektion p in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ ist die Summe von k eindimensionalan Projektionen und erfüllt daher $\tau'(p) = \frac{k}{n}$. Dies zeigt, dass $\tau'(p) = \tau(p)$ für alle $p \in \mathrm{Proj}(M)$. Da die Projektionen einer von Neumann Algebra einen Norm-dichten Unterraum aufspannen, und da τ' und τ linear und norm-stetig sind, folgt $\tau'(x) = \tau(x)$ für alle $x \in M$.

Wir nehmen nun an, dass M von Typ II_1 ist. Durch Proposition 14 and Proposition 15 wissen wir, dass M einen normalen, treuen Spurzustand τ besitzt. Wir wissen auch, dass äquivalente Projektionen den selben Wert unter τ annehmen. Um die Umkehrung zu zeigen, seien $p, q \in \mathrm{Proj}(M)$ mit $\tau(p) = \tau(p)$. Nach [Zhu93, Section 25.3] gilt $p \precsim q$ oder $q \precsim p$. Falls $p \precsim q$, dann wählen wir eine Projektion q_1 mit $p \sim q_1 \leq q$. Da $\tau(q) = \tau(p) = \tau(q_1)$, und da τ treu ist, folgt $q_1 = q$, und damit $p \sim q$. Wir haben die selbe Schlussfolgerung, falls $q \precsim p$. Wir haben also $p \sim q$ genau dann wenn $\tau(p) = \tau(q)$. Analog beweist man, dass $p \precsim q$ genau dann wenn $\tau(p) \leq \tau(q)$.

Es sei $t \in [0,1]$. Wir konstruieren nun eine Projection mit Spur t. Da M von Typ II ist, können wir induktiv das Halbierungslemma (Lemma 16) anwenden um Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Projektionen in M zu finden, so dass

$$\begin{aligned} 1 &= p_1 + q_1, & p_1 &\perp q_1, & p_1 &\sim q_1, \\ q_1 &= p_2 + q_2, & p_2 &\perp q_2, & p_2 &\sim q_2, \\ q_2 &= p_3 + q_3, & p_3 &\perp q_3, & p_3 &\sim q_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wir erhalten $1 = \tau(1) = \tau(p_1) + \tau(q_1) = 2\tau(p_1)$ und daher $\tau(p_1) = \frac{1}{2}$. Es folgt $\frac{1}{2} = \tau(p_1) = \tau(p_2)+\tau(q_2) = 2\tau(p_2)$ und daher $\tau(p_2) = \frac{1}{2^2}$. Wir erhalten $\tau(p_n) = \frac{1}{2^n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Es sei $t(n) \in \{0, 1\}$ die n-te Stelle der Binärdarstellung von t. Dann gilt

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(n)}{2^n}.$$

Wir setzen

$$p(t) := \sum_{n=1}^{\infty} t(n)p_n.$$

Dann ist $p(t)$ eine Projektion in A. Da τ normal ist, haben wir

$$\tau\big(p(t)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} t(n)\tau(p_n) = t.$$

Wir setzen $p(1) := 1$ und $p(0) := 0$. Wir haben dann für jedes $t \in [0,1]$ eine Projektion $p(t)$ mit $\tau(p(t)) = t$.

Es sei τ' ein weiterer Spurzustand auf M. Um zu zeigen, dass $\tau' = \tau$, genügt es wie im Fall eines Typ I_n Faktors zu zeigen, dass $\tau'(p) = \tau(p)$ für alle $p \in \mathrm{Proj}(M)$. Es sei $p \in \mathrm{Proj}(M)$. Wir setzen $t = \tau(p)$. Dann gilt $\tau(p) = t = \tau(p(t))$ und daher $p \sim p(t)$. Im Beweis, dass $\tau(p_n) = \frac{1}{2^n}$, wurde nur die Spureigenschaft benutzt. Wir haben daher $\tau'(p_n) = \frac{1}{2^n}$. Da $p(t) \geq \sum_{n=1}^{m} t(n)p_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$, erhalten wir

$$\tau'\big(p(t)\big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} t(n)2^{-n} = t.$$

(Wir können nicht direkt Gleichheit folgern, dass τ' nicht als normal angenommen ist.) Da $p \sim p(t)$, folgt $\tau'(p) = \tau'(p(t)) \geq t = \tau(p)$. Das selbe Argument angewandt auf $1-p$ ergibt $\tau'(1-p) \geq \tau(1-p)$, und somit

$$\tau'(p) = 1 - \tau'(1-p) \leq 1 - \tau(1-p) = \tau(p).$$

Also gilt $\tau'(p) = \tau(p)$. □

Es sei A eine C^*-Algebra. Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Proj}(A)$. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit $V(A)$, das heißt, $V(A) := \mathrm{Proj}(A)/\sim$. Falls M ein Faktor ist, dann ist $\mathrm{Proj}(M)$ total geordnet bezüglich $\precsim$. Aus dem Beweis von Theorem 17 erhalten wir direkt das folgende Resultat:

Proposition 18. *Es sei M ein endlicher Faktor mit Spurzustand τ. Dann gilt:*

(1) *Falls M von Typ I_n für ein $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ist τ ein Ordnungsisomorphismus von $V(M)$ auf $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$.*

(2) *Falls M von Typ II_1 ist, dann ist τ ein Ordnungsisomorphismus von $V(M)$ auf $[0,1]$.*

References

[BP91] L. G. Brown and G. K. Pedersen, C^*-Algebras of real rank zero, *J. Funct. Anal.* **99** (1991), 131–149. MR 1120918. Zbl 0776.46026.

[CP79] J. Cuntz and G. K. Pedersen, Equivalence and traces on C^*-Algebras, *J. Funct. Anal.* **33** (1979), 135–164. MR 546503. Zbl 0427.46042.

[MvN37] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **41** (1937), 208–248. MR 1501899. Zbl 0017.36001.

[Ped69] G. K. Pedersen, Measure theory for C^* algebras. III, IV, *Math. Scand. 25 (1969), 71-93; ibid.* **25** (1969), 121–127. MR 0259627. Zbl 0189.44504.

[Ped75] G. K. Pedersen, The trace in semi-finite von Neumann algebras, *Math. Scand.* **37** (1975), 142–144. MR 0399880. Zbl 0323.46062.

[Yea71] F. J. Yeadon, A new proof of the existence of a trace in a finite von Neumann algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), 257–260. MR 0271748. Zbl 0241.46057.

[Zhu93] K. H. Zhu, *An introduction to operator algebras*, *Studies in Advanced Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993. MR 1257406.