ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

им. Н. Н. Боголюбова

Duплий Степан Анатольевич

УДК 539.12

ПОЛУГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

01.04.02. – Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Киев – **1999**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Построение единой теории всех фундаментальных взаимодействий — электромагнитного, слабого, сильного и гравитационного — является важнейшей теоретической проблемой современной физики элементарных частиц. Существенным достижением в этом направлении явилось развитие методов суперсимметрии и супергравитации, которые позволили разрешить такие трудности предшествующих суперсимметрии калибровочных теорий фундаментальных взаимодействий (квантовой электродинамики, квантовой хромодинамики и модели Вайнберга-Салама), как включение гравитации и рассмотрение процессов при планковских энергиях.

Нелокальное многомерное обобщение супергравитации – теория суперструн – дала ответ на многие открытые вопросы, связанные с неперенормируемостью и космологической постоянной, а также с последовательной унификацией всех фундаментальных взаимодействий. В теории суперструн осуществился синтез разнообразных методов теоретической и математической физики. Тем не менее, дальнейший прогресс в понимании глубинных физических основ строения материи, в свою очередь, требует интенсивных поисков нестандартных путей разрешения известных проблем и привлечения принципиально новых теоретических идей.

Наиболее фундаментальными и общими являются абстрактные алгебраические свойства теории, лежащей в основе физики элементарных частиц. Как правило, вначале исследований такие свойства вводятся с математической точки зрения и лишь затем формулируются на языке физических законов и предсказаний результатов эксперимента.

Так произошло и в случае суперсимметрии: антикоммутирующие величины рассматривались многими математиками еще начиная с прошлого столетия. Но лишь после открытия суперсимметрии физиками в начале 70-х годов она превратилась из чисто математической теории в “индустриальную” основу современного “моделестроения” с физическими конструкциями и конкретными предсказаниями новых элементарных частиц — суперпартнеров. Настоящий “бум суперсимметризации” потряс теоретическую физику 70-х и 80-х: все, что могло “суперсимметризоваться”, незамедлительно “суперсимметризовалось”. Основные ингредиенты теории после очевидных модификаций наделялись приставкой “супер”, а затем построение уже суперсимметричной модели, исключая несущественные и не принимаемые в расчет моменты, копировались шаг за шагом из подобной несуперсимметричной версии, и последняя обязана была быть некоторым ее непрерывным пределом.

Однако, при этом абстрактные алгебраические свойства физической теории или вовсе не претерпевали изменений, либо влияние “суперсимметризации” было просто символичным. Так предполагалось, что именно супергруппы представляют собой адекватное суперобобщение соответствующих групп. И это удивительно, поскольку среди основных переменных суперсимметричной теории изначально присутствуют необратимые объекты и делители нуля. В частности, концепция суперпространства, допускающего унификацию описания бозонных и фермионных секторов теории, основана на введении дополнительных нильпотентных координат, тогда многие отображения и функции становятся необратимыми по определению. И все же, как это ни странно и ни парадоксально с математической точки зрения, они искусственно и необоснованно исключались из рассмотрения. Данная процедура была названа “факторизацией по нильпотентам” в физике (в теории полугрупп эта процедура хорошо известна и называется факторизацией Риса) и она (в основном неаргументированно) применялась или подразумевалась при суперсимметризациях.

На самом деле, все преобразования множества, содержащего нильпотенты, или все отображения суперпространства сохраняющего вид определенной структуры образуют полугруппу (а не группу) относительно композиции. Поэтому категория групп, в рамках которой строились несуперсимметричные теории элементарных частиц, должна быть обобщена до категории полугрупп при математически строгом включении суперсимметрии в основополагающие принципы теории.

Другими словами, переход от пространства к суперпространству должен сопровождаться одновременным переходом от групп к суперполугруппам, а не супергруппам — “супер” обобщение физической теории должно сопровождаться “полу” обобщением ее математики в целом. Тогда в глобальном теоретико-групповом смысле суперсимметричные модели элементарных частиц обязаны иметь структуру полугруппы, в то время, как наблюдаемый их сектор при настоящих энергиях может удовлетворительно описываться их обратимой групповой частью. Поэтому не следует ограничиваться исследованиями лишь последней, поскольку свойства идеальной и групповой частей взаимообусловлены и взаимозависимы. В этом контексте важным также является пересмотр стандартного анзаца “факторизации”, а именно — “факторизовать по не-нильпотентам”, т. е. изучать “негрупповые” (или идеальные) свойства суперсимметричных теорий.

Таким образом, построение и исследование таких суперсимметричных моделей элементарных частиц, которые, с одной стороны, обладали бы математической общностью и корректностью в рамках аппарата теории полугрупп, а с другой стороны, имели бы достаточную физическую предсказательную силу, представляет собой актуальную научно-теоретическую проблему.

Основной объект в теории суперструн — это мировая поверхность струны, следовательно построение и изучение необратимых и полугрупповых обобщений супермногообразий и суперконформной дифференциальной геометрии представляет собой первоочередную задачу.

В этой связи чрезвычайно актуальной является также проблема обратного влияния суперсимметрии на теорию полугрупп. Так, подробное исследование необратимых суперматриц приводит к новым и неожиданным результатам в идеальном строении и теории представлений суперматричных полугрупп, что, в свою очередь, может способствовать последовательному и корректному построению новых суперсимметричных моделей элементарных частиц, основанных на полугрупповых принципах.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертация выполнена как часть исследований, проводимых на кафедрах теоретической и экспериментальной ядерной физики ХГУ в рамках координационного плана Министерства образования Украины "Комплексные исследования ядерных процессов и создание на их основе ядерно-физических методов для использования в энергетике и радиационной безопасности ядерных энергетических установок и технологий радиационной модификации материалов и экологии".

Результаты диссертации вошли в отчеты госбюджетных тем "Исследования структуры атомных ядер и новых закономерностей в ядерных взаимодействиях" (тема №1-13-94, номер государственной регистрации 0194U018989) и "Исследования ядерных процессов с участием нуклонов и сложных частиц низких и средних энергий" (тема №1-13-97, номер государственной регистрации 0197U016494).

Цель и задачи исследования. Основной целью диссертационной работы является разработка и применение полугрупповых методов в суперсимметричных моделях элементарных частиц. Для этого решались такие задачи:

1. Подробный анализ необратимых свойств преобразований, возникающих при суперсимметризации физических теорий.

2. Поиск необратимых аналогов супермногообразий, расслоений и гомотопий.

3. Формулировка необратимой суперконформной дифференциальной геометрии и построение суперконформных полугрупп.

4. Классификация необратимых расширенных и нерасширенных суперконформных преобразований.

5. Нахождение нелинейных реализаций необратимых суперконформных преобразований.

6. Всесторонний анализ суперматричных полугрупп, поиск новых представлений и эквивалентностей.

7. Введение новых типов матриц, содержащих нильпотентные элементы и изучение их свойств.

8. Построение необратимого аналога гиперболической геометрии на суперплоскости.

Научная новизна полученных результатов. Научная новизна диссертационной работы состоит в построении нового направления в суперсимметричных моделях элементарных частиц, которое основано на включении полугрупп, идеалов и необратимых свойств в исследование математической структуры. Впервые определены необратимые аналоги супермногообразий, расслоений и гомотопий. Сформулирована новая необратимая суперконформная геометрия (и ее расширенные варианты), найдены новые типы суперконформных полугрупп и преобразований, которые сплетают четность касательного расслоения. Предложена альтернативная редукция суперматриц, которая приводит к новым абстрактным свойствам, полугруппам и супермодулям. Впервые суперматрицы используются для построения представлений полугрупп связок, при этом найдены новые обобщенные отношения Грина. Построен необратимый вариант гиперболической геометрии на суперплоскости, где найдены необратимые аналоги двойных отношений, инвариантов и расстояний.

Практическое значение полученных результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для построения новых математически корректных моделей элементарных частиц, основанных на теории суперструн, переосмысленного анализа необратимости в уже имеющихся моделях, а также для поиска новых полугрупповых свойств и структур в суперсимметричных объектах и пространствах.

Личный вклад диссертанта. Все результаты получены автором самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы докладывались автором на 12 международных конференциях, 10 из которых проводились за рубежом:

1. Международная школа по теоретической и математической физике *(Гваделупа, Франция, 1993)*
2. Международный коллоквиум по теоретико-групповым методам в математической физике *(Париж, Франция, 1993)*
3. Международный конгресс по математической физике *(Париж, Франция, 1994)*
4. Международная краковская школа по теоретической физике *(Закопане, Польша, 1995)*
5. Международная конференция по калибровочным теориям, прикладной суперсимметрии и квантовой гравитации *(Леувен, Бельгия, 1995)*
6. Европейская школа по теории групп *(Валладолид, Испания, 1995)*
7. Международная конференция суперсимметрия-96 *(Коллеж Парк, США, 1996)*

8. Международная конференция по высшим гомотопическим структурам в математической физике *(Покипси, США, 1996)*

9. Международный семинар по суперсимметрии и квантовой теория поля памяти Д. В. Волкова *(Харьков, Украина, 1997)*

10. Международная конференция по суперсимметрии и квантовым симметриям памяти В. И. Огиевецкого *(Дубна, Россия, 1997)*

11. Международная алгебраическая конференция памяти Л. М. Глускина *(Славянск, Украина, 1997)*

12. Международный конгресс математиков *(Берлин, Германия, 1998)*

Материалы диссертационной работы представлялись и всесторонне обсуждались на многих семинарах в Украине, России, Германии, Англии, Франции, США и других странах.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 21 работах (из них 12 в зарубежных изданиях), а также в трудах упомянутых конференций. Все работы выполнены без соавторов. Большинство работ предварительно опубликовано также в интернете и хранится в международных электронных архивах США, Англии, Италии, Японии. Прямой доступ к ним возможен с интернетовской страницы автора: `http://www-home.univer.kharkov.ua/~duplij`.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из Введения, 5-ти основных разделов, раздела Выводы и приложений. Объем основного текста (без приложений и литературы) составляет 292 страницы. В работе имеется 3 рисунка, 3 таблицы и список литературы из 832 названий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обоснована актуальность проблемы, сформулирована цель работы, ее научная новизна, практическая ценность и апробация, кратко изложено ее содержание.

В разделе “Теория необратимых супермногообразий” подробно анализируются обобщения понятий супермногообразия, суперрасслоение и гомотопии на необратимый случай. На языке карт и функций перехода вводятся понятие полусупермногообразия как необратимого аналога супермногообразия. Префикс “полу-” отражает тот факт что лежащие в основе морфизмы формируют полугруппы состоящие из известной групповой части и новой идеальной необратимой части, т.е. рассматривается полугрупповое обобщение предыдущего формализма.

Полукарта определяется как пара из суперобласти $\mathscr{U}_{\alpha,}^{noninv}$ и необратимого морфизма $\varphi_{\alpha}^{noninv}$. Тогда полуатлас есть объединение стандартных обратимых карт $\left\{\mathscr{U}_{\alpha,}^{inv}\varphi_{\alpha}^{inv}\right\}$ и полукарт $\left\{\mathscr{U}_{\alpha,}^{noninv}\varphi_{\alpha}^{noninv}\right\}$. Полусупермногообразие $\mathscr{M}$ есть суперпространство, представленное в качестве полуатласа.

Функции перехода на полусупермногообразии находятся не из стандартных выражений $\Phi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha} \circ \varphi_{\beta}^{-1}$ на пересечении суперобластей $\mathscr{U}_{\alpha} \cap \mathscr{U}_{\beta}$, а из системы уравнений

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta} = \varphi_{\alpha}, \qquad \Phi_{\beta\alpha} \circ \varphi_{\alpha} = \varphi_{\beta}.$$

В общем случае при нахождении $\Phi_{\alpha\beta}$ и $\Phi_{\beta\alpha}$ эти уравнения не могут быть решены с помощью $\Phi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha} \circ \varphi_{\beta}^{-1}$ в силу необратимых φ_{α} и φ_{β}. Вместо этого ищутся искусственные приемы его решения, например, разложением в ряд по генераторам суперaлгебры, либо используя абстрактные методы теории полугрупп, которые рассматривают решения необратимых уравнений как классы эквивалентности.

Ослабление обратимости позволяет естественно обобщать условия коцикла для функций перехода полусупермногообразий. Они строятся аналогично условиям регулярности для элементов полугруппы. Так, вместо стандартного $n = 2$ условия взаимной обратности функций перехода $\Phi_{\alpha\beta}$ и $\Phi_{\beta\alpha}$ в виде $\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} = 1_{\alpha\alpha}$ (где $1_{\alpha\alpha}$ — тождественное отображение на $\mathscr{U}_\alpha$) имеем обобщенное условие

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}$$

на пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$. А вместо известного $n = 3$ условия коцикла $\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} = 1_{\alpha\alpha}$ на пересечении трех суперобластей $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ получаем его необратимый аналог

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}.$$

Аналогично строятся условия коцикла при произвольных n, которое мы называем n-регулярностью отображений. Понятно, что 3-регулярность совпадает с обыкновенной регулярностью.

Это позволяет сформулировать чрезвычайно общий анзац полукоммутативности для необратимых морфизмов, который при $n = 3$ описывается следующей коммутативной диаграммой

$$n = 3 \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\Phi_{\alpha\beta}"] & {} \arrow[d, "\Phi_{\beta\gamma}"] \\ & {} \arrow[ul, "\Phi_{\gamma\alpha}"] \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} {} \arrow[r, shift left, "\Phi_{\alpha\beta}"] \arrow[r, shift right] & {} \arrow[d, "\Phi_{\beta\gamma}"] \\ & {} \arrow[ul, "\Phi_{\gamma\alpha}"] \end{tikzcd} + \textit{permutations}$$

Обратимый морфизм — Необратимый (регулярный) морфизм

Получены также необратимые аналоги коциклов для рефлексивных полусупермногообразий.

Найден дополнительный нильпотентный тип ориентируемости на полусупермногообразиях, который обусловлен нильпотентностью березиниана функций перехода. Индекс нильпотентности березиниана позволяет нам систематизировать полусупермногообразия имеющие нильпотентную ориентируемость. Вводятся также башенные тождества и препятственность, с помощью которых удается проклассифицировать полусупермногообразия. По аналогии с суперчислами имеем следующую классификацию:

- *Суперчисла.*

  1. Обыкновенные не равные нулю числа (обратимые).

  2. Суперчисла, имеющие ненулевую числовую часть (обратимые).

  3. Суперчисла, имеющие нулевую числовую часть (необратимые).

- *Полусупермногообразия.*

  1. Обыкновенные многообразия (функции перехода обратимы).

  2. Супермногообразия (функции перехода обратимы).

  3. Препятственные полусупермногообразия (функции перехода необратимы).

Аналогичным образом вводятся полурасслоения, в которых необратимость возникает за счет необратимости функций перехода, связанной с нильпотентами и дивизорами нуля в подстилающей супералгебре. Далее рассматриваются морфизмы и условия соответствия полурасслоений. Обобщенные условия коцикла для функций перехода полусупермногообразий и полурасслоений могут приводить к построению необратимых аналогов коциклов Чеха и спектральных последовательностей, что тесно связано с когомологическими методами теории полугрупп.

Для описания обобщенных морфизмов на полусупермногообразиях определяются четные и нечетные полугомотопии с необратимым четным или нечетным суперпараметром соответственно. Полугомотопии приводят к рассмотрению фундаментальных полугрупп и играют ту же роль в изучении свойств непрерывности и классификации полусупермногообразий, которую обыкновенные гомотопии играют для обыкновенных (супер)многообразий.

Раздел “Необратимое обобщение $N = 1$ суперконформной геометрии” посвящен построению необратимой суперконформной дифференциальной геометрии $(1|1)$-мерного комплексного суперпространства $Z = (z, \theta) \in \mathbb{C}^{1|1}$, которая исключительно важна в теории суперструн, суперримановых поверхностей и в двумерных суперконформных теориях поля.

Вначале строится полугруппа супераналитических преобразований $\mathbb{C}^{1|1} \to \mathbb{C}^{1|1}$ и проводится их классификация по необратимости. Вводятся локальные единицы и нули и анализируются их свойства. Приведены соотношения на тройных пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ для супераналитических полусупермногообразий. Получено выражение для необратимого аналога березиниана и проведена классификация супераналитических преобразований $\mathbb{C}^{1|1} \to \mathbb{C}^{1|1}$ по индексу нильпотентности березиниана.

Далее подробно проанализированы все возможные редукции касательного $(1|1)$-мерного пространства без учета требования обратимости. Оказывается, что нетривиальных редукций имеется две, а не одна, как в обратимом случае. Это связано с фундаментальной формулой сложения березинианов редуцированных суперматриц касательного пространства

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_A = \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_S + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_T,$$

где P_A — полная суперматрица, P_S и P_T — треугольная и антитреугольная суперматрицы соответственно. Отсюда редуцированные (суперконформно-подобные) преобразования определяются проектированием березиниана на одно из слагаемых. Тогда в терминах преобразованных координат $\tilde{Z} = \left(\tilde{z}, \tilde{\theta}\right)$ получаем два условия

$$\mathit{\Delta}\left(z,\theta\right) = D\tilde{z} - D\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta} = 0, \quad Q\left(z,\theta\right) = \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta} = 0,$$

где ∂ и D — обычная и суперпроизводная соответственно.

Первое из них определяет стандартные суперконформные преобразования $\mathcal{T}_{SCf}$ (обратимые и необратимые), а второе условие приводит к новым необратимым преобразованиям $\mathcal{T}_{TPt}$, сплетающим четность в касательном и кокасательном суперпространствах. Действительно, если суперконформные преобразования индуцируют ковариантные преобразования супердифференциалов $dZ = dz + \theta d\theta$ и суперпроизводных

$$D = D\tilde{\theta}\cdot\tilde{D}, \quad d\tilde{Z} = Q\left(z,\theta\right)\cdot dZ,$$

то сплетающие четность преобразования также дают ковариантные преобразования в касательном суперпространстве, но с вращением четности

$$\partial = \partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{D}, \quad d\tilde{Z} = \mathit{\Delta}\left(z,\theta\right)\cdot d\theta.$$

Первые два соотношения является ключевыми для построения теории распределения на суперримановых поверхностях, которые определяются уравнением $\mathit{\Delta}\left(z,\theta\right) = 0$. Другое условие $Q\left(z,\theta\right) = 0$ определяет необратимый аналог суперримановых поверхностей, в которых четность касательного пространства не фиксирована. Такая конструкция с функциями перехода из $\mathcal{T}_{SCf}$ и $\mathcal{T}_{TPt}$ может рассматриваться как частный случай введенных ранее полусупермногообразий. Кроме того, новые сплетающие четность преобразования возможно могут приводить к дополнительным вкладам в амплитуду фермионных струн специальной конфигурации.

Рассмотрены также левые вырожденные редуцированные преобразования $\mathcal{T}_{Deg_L}$, для которых оба условия $\varDelta(z,\theta)=0$ и $Q(z,\theta)=0$ выполняются одновременно, а также правые вырожденные редуцированные преобразования $\mathcal{T}_{Deg_R}$, которые определяются условием $D\tilde{\theta}=0$.

Найдено единое описание обоих типов редуцированных преобразований с помощью альтернативной параметризации, в котором различие между ними определяется проекцией некоторого "спина редукции" $n=\pm1/2$, где знак $\pm$ соответствует преобразованиям $\mathcal{T}_{SCf}$ и $\mathcal{T}_{TPt}$ соответственно. Приведена таблица умножения для "спина редукции" и описаны его свойства. Если суперконформные преобразования $\mathcal{T}_{SCf}$ являются супераналогом голоморфных преобразований, то сплетающие четность преобразования $\mathcal{T}_{TPt}$ можно трактовать как супераналог антиголоморфных преобразований комплексной плоскости, которые обязаны быть необратимыми.

Другим важным свойством сплетающих четность преобразований $\mathcal{T}_{TPt}$ является незамкнутость композиции (как, впрочем, и антиголоморфных преобразований). Однако, на пересечении трех суперобластей $\mathscr{U}\cap\tilde{\mathscr{U}}\cap\tilde{\tilde{\mathscr{U}}}$ и $\mathcal{T}:\mathscr{U}\to\tilde{\mathscr{U}}$, $\tilde{\mathcal{T}}:\tilde{\mathscr{U}}\to\tilde{\tilde{\mathscr{U}}}$, $\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}:\mathscr{U}\to\tilde{\tilde{\mathscr{U}}}$ выполняется следующий закон умножения преобразований $\tilde{\mathcal{T}}_{SCf}\circ\mathcal{T}_{TPt}=\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}_{TPt}$. Отсюда видно, что множество сплетающих четность преобразований является правым идеалом для суперконформных преобразований. Кроме того, вместо стандартного условия коцикла на суперримановой поверхности $D\tilde{\tilde{\theta}}=D\tilde{\theta}\cdot\tilde{D}\tilde{\tilde{\theta}}$ мы определяем "сплетенный коцикл"

$$\partial\tilde{\tilde{\theta}}=\partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{D}\tilde{\tilde{\theta}}$$

с множителями различной четности. Тогда возможно построение принципиально новых распределений и расслоений, которые не сохраняют четность, как в классическом случае.

Применяя анзац ослабления обратимости можно обобщить и сами суперконформные преобразования. Новая параметризация $N=1$ суперконформной группы позволила расширить ее до полугруппы $\mathbf{S}_{SCf}$ и унифицировать описание старых и новых преобразований. Мы нашли, что построенная полугруппа принадлежит к новому абстрактному типу полугрупп, удовлетворяющим необычному идеальному умножению

$$\mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{I}_n,\ \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1},\ \mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1},$$

где $\mathbf{I}_n$ — члены построенного идеального ряда, имеющего специфические свойства. Из этого умножения можно определить $\mathbf{I}_n$ как правый и двусторонний повышающий идеал, но обычный левый идеал, что говорит о нетривиальной идеальной структуре $N = 1$ суперконформной полугруппы.

Введены и изучены свойства обобщенных векторных и тензорных отношений Грина, также определены идеальные квазихарактеры в суперконформной полугруппе.

Исследование свойств дробно-линейных $N = 1$ редуцированных преобразований проводится в терминах нечетных аналогов миноров для суперматриц — полуминоров, которые являются полуматрицами вида $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ (a, b — четные, γ, δ — нечетные) и описывают вращающие четность отображения линейных двумерных суперпространств $\mathbf{\Lambda}^{2|0} \to \mathbf{\Lambda}^{1|1}$ и $\mathbf{\Lambda}^{1|1} \to \mathbf{\Lambda}^{2|0}$. Определено отображение $\mathbf{\Theta}$ — полутранспонирование, связывающее полуматрицы с матрицами $\mathcal{M} \overset{\mathbf{\Theta}}{\leftrightarrow} \mathrm{M}$. Полутранспонирование можно трактовать как извлечение квадратного корня из хорошо известного оператора смены четности — $\mathbf{\Pi}$-транспонирования. Для описания сплетающих четность преобразований вводятся нечетные аналоги детерминанта и перманента от полуматриц — полудетерминант $\delta\mathrm{et}\mathcal{M} = a\delta - b\gamma$ и полуперманент $\pi\mathrm{er}\mathcal{M} = a\delta + b\gamma$, которые нильпотентны и удовлетворяют нетривиальным соотношениям. Полудетерминант дуален с детерминантом в том смысле, для необратимых преобразований полудетерминант $\delta\mathrm{et}\mathcal{M}$ играет роль, аналогичную той, которую корень из обычного детерминанта $\sqrt{\det \mathrm{M}}$ играет для обратимых преобразований. Найдена четно-нечетная симметрия дробно-линейных $N = 1$ суперконформных преобразований, которая состоит в симметрии относительно одновременной замены детерминанта на полудетерминант и четных координат на нечетные.

Найдены и исследованы необратимые супераналоги расстояния в $(1|1)$-мерном суперпространстве. Введен необратимый TPt аналог метрики ds по формулам

$$|ds| \operatorname{Im}\theta = |d\theta| , \quad |ds| \left(\operatorname{Im}\tilde{z} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}\tilde{\tilde{\theta}} \right) = \left| d\tilde{Z} \right|$$

и сформулирован необратимый аналог инвариантности — “полуинвариантность” введенной метрики.

Далее изучаются нелинейные реализации редуцированных суперконформно-подобных преобразований, и в дополнение к вышеупомянутым исследованиям, мы включаем в рассмотрение конечные преобразования и учитываем их необратимость. Рассмотрена трактовка нелинейных реализаций как движение нечетной кривой в суперпространстве $\mathbb{C}^{1|1}$ и получены представления для конечных обратимых и необратимых $N = 1$ суперконформных преобразований, а также для сплетающих четность преобразований как уравнений для SCf голдстино и TPt голдстино.

Соотношение между линейной и нелинейной реализациями изучены в рамках диаграммного подхода

$$\begin{tikzcd} Z_A \arrow[r, "\mathcal{G}", "\text{W-Z}"'] & \tilde{Z} \\ Z \arrow[u, "\mathcal{A}"] \arrow[r, "\mathcal{H}", "\text{A-V}"'] & Z_H \arrow[u, "\mathcal{B}"'] \end{tikzcd}$$

Здесь преобразование $\mathcal{G}$ играет роль линейного преобразования, преобразование $\mathcal{H}$ является нелинейным (в обратимом случае — из подгруппы $\mathcal{G}$), в то время, как $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответствуют косетным преобразованиям с голдстоуновскими полями как параметрами. Для конечных редуцированных обратимых и необратимых преобразований с учетом их таблицы умножения получены следующие возможные представления

$$\mathcal{G}_{SCf} \circ \mathcal{A}_{SCf} = \mathcal{B}_{SCf} \circ \mathcal{H}_{SCf}, \quad \mathcal{G}_{TPt} \circ \mathcal{A}_{SCf} = \mathcal{B}_{TPt} \circ \mathcal{H}_{SCf}$$

(второе уравнение является новым) и соответствующие компонентные уравнения, которые решены в частных случаях.

В разделе “Необратимая геометрия расширенных редуцированных преобразований” рассмотрены $N = 2$ и $N = 4$ редуцированные обратимые и необратимые отображения. Получено общее выражение для березиниана расширенных преобразований в терминах полуминоров суперматриц касательного $(1|N)$-мерного пространства в комплексном базисе.

Сформулированы теоремы сложения $N = 2$ и $N = 4$ березинианов, откуда следуют возможные редукции $(1|N)$-мерных касательных пространств. Нетривиальных редукций оказывается $N + 1$, что приводит к N-обобщению понятия комплексной структуры: для N-редуцированных преобразований имеется 1 четный (обратимый или необратимый) суперконформный (SCf) супераналог голоморфных преобразований и N нечетных необратимых сплетающих четность (TPt) супераналогов антиголоморфных преобразований.

Подробно классифицированы $N = 2$ и $N = 4$ суперконформные преобразования с использованием перманентов. Получен общий вид березиниана для обратимых N-SCf преобразований

$$\mathrm{Ber}\,\left(\tilde{Z}/Z\right) = k\,(\det \mathrm{H})^{\frac{2-N}{N}}\,,$$

где H — матрица производных $D_i\tilde{\theta}_k$ в комплексном базисе и $k = \pm 1$.

В частном случае $N = 2$ получено выражение березиниана через перманент

$$\mathrm{Ber}\,\left(\tilde{Z}/Z\right) = \frac{\det \mathrm{H}}{\mathrm{per}\,\mathrm{H}}.$$

Проведена классификация в терминах перманентов обратимых и необратимых расщепленных суперконформных преобразований, описывающих спиновые структуры на обыкновенной римановой поверхности и играющих важную роль в расчете суперструнных амплитуд.

Построены $N = 2$ и $N = 4$ суперконформные полугруппы в альтернативной параметризации и подробно исследованы их свойства. Приведено компонентное представление. Определены и обсуждаются свойства сплетающих четность преобразований и соответствующих супердифференциалов, дуальных соответствующим суперпроизводным.

Раздел "Суперматричные полугруппы, идеальное строение и редукции" посвящен построению и исследованию идеальных свойств суперматриц. На примере $(1|1) \times (1|1)$ суперматриц изучено их необратимое строение и определяется два типа возможных редукций: четно-редуцированные (треугольные) суперматрицы S и нечетно-редуцированные (антитреугольные) суперматрицы T. Для них справедлива теорема сложения березинианов

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{M} = \mathrm{Ber}\,\mathrm{S} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{T}.$$

Изучены мультипликативные свойства нечетно-редуцированных суперматриц, которые приводят к выводу о том, что нечетно-редуцированный морфизм может представляться в качестве произведения нечетно- и четно-редуцированных морфизмов, таковых, что

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\mathrm{S}"] \arrow[dr, "\mathrm{T}"'] & {} \arrow[d, "\mathrm{T}"] \\ & {} \end{tikzcd}$$

коммутативная диаграмма, которая ответственна также и за сплетенные коциклы в редуцированных суперконформных преобразованиях.

Построена полугруппа множеств редуцированных матриц. Множества четно- и нечетно-редуцированных суперматриц объединяются в некоторую сэндвич полугруппу с несимметричным умножением, зависящим от второго сомножителя. Полугруппа множеств редуцированных матриц изоморфна некоторой полугруппе правых нулей с сэндвич умножением.

Чтобы построить аналогичную сэндвич полугруппу с умножением не множеств, а самих суперматриц, вводится нечетный антикоммутирующий аналог $\mathcal{E}(\chi)$ (антискаляр) для скалярной суперматрицы $\mathrm{E}(x)$ (скаляра) по формулам $\mathrm{E}(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}(\chi) = \begin{pmatrix} 0 & \chi \\ \chi & 0 \end{pmatrix}$. Тогда прямая сумма скаляра и анти-скаляра совпадает со странной подалгеброй Березина $\mathrm{E}(x) \oplus \mathcal{E}(\chi) = \mathrm{Q}_\Lambda(1)$. Определяется в этой связи также правое $\mathbf{\Upsilon}_R$ и левое $\mathbf{\Upsilon}_L$ антитранспонирования, которые имеют смысл корня из оператора смены четности $\mathbf{\Pi}$, поскольку $\mathbf{\Upsilon}_R \mathbf{\Upsilon}_L = \mathbf{\Pi}$. Тогда конкретная реализация нечетного правого, левого и двустороннего модулей имеет вид

$$\mathcal{E}(\chi)\,\mathrm{M} = \chi \mathrm{M}^{\mathbf{\Upsilon}_R}, \quad \mathrm{M}\mathcal{E}(\chi) = \mathrm{M}^{\mathbf{\Upsilon}_L}\chi, \quad \mathcal{E}(\chi_1)\,\mathrm{M}\mathcal{E}(\chi_2) = \chi_1 \mathrm{M}^{\mathbf{\Pi}}\chi_2,$$

где, в отличие от стандартного супермодуля, в правой части появились антитранспонирования и оператор смены четности. Нахождение новых типов нечетных модулей является исключительно важным для построения и применения новых типов супермногообразий и полусупермногообразий.

Чтобы получить объединенное умножение четно- и нечетно-редуцированных суперматриц и построить соответствующую полугруппу, введенные антискаляры использовались наравне со скалярами. Если трактовать обычное умножение суперматриц как сэндвич-умножение со скаляром $\mathrm{E}\left(1\right)$, то сэндвич-умножение редуцированных суперматриц (с "суперполем" $X=\left(x,\chi\right)$) определится как

$$\mathrm{R}_1 \star_X \mathrm{R}_2 = \begin{cases} \mathrm{R}_1 \mathrm{E}\left(x\right)\mathrm{R}_2, & \mathrm{R}_2 = \mathrm{S}, \\ \mathrm{R}_1 \mathcal{E}\left(\chi\right)\mathrm{R}_2, & \mathrm{R}_2 = \mathrm{T}. \end{cases}$$

Поскольку сэндвич-умножение ассоциативно, редуцированные суперматрицы образуют полугруппу, которая изоморфна полугруппе правых нулей.

Рассмотрена также роль нечетных модулей и антискаляров в прямой сумме множеств редуцированных суперматриц, где введенны нечетные аналоги собственных чисел, характеристических функций (по формуле $\mathrm{Ber}\left(\mathcal{E}\left(\chi\right)-\mathrm{T}\right)$ вместо $\mathrm{Ber}\left(\mathrm{E}\left(x\right)-\mathrm{S}\right)$) и сформулирована обобщенная теорема Гамильтона-Якоби.

Важную роль в суперсимметричных теориях играют непрерывные полугруппы редуцированных суперматриц. Рассмотрена и подробно проанализирована идеальная структура многопараметрических полугрупп нечетно-редуцированных суперматриц. Показано, что общий вид суперматриц, образующих полугруппу (Γ-полугруппу), есть

$$\mathrm{T}^{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \mathrm{Ann}\,\Gamma & \mathrm{B} \end{pmatrix},$$

и их подмножество $\mathfrak{T}^{\Gamma} = \bigcup \mathrm{T}^{\Gamma}$ в множестве всех матриц $\mathfrak{M}$ является слабым идеалом, который для некоторого $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ определяется следующим соотношением $\mathfrak{T}^{\Gamma} \star \mathfrak{M} \star \mathfrak{T}^{\Gamma} \subseteq \mathfrak{T}^{\Gamma_1}$.

Обнаружено, что одно- и двухпараметрические полугруппы $\mathbf{P}_\alpha$ нечетно-редуцированных идемпотентных суперматриц вида $\begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ \alpha u & 1 \end{pmatrix}$ ($\alpha^2 = 0$, u, t — параметры) непрерывно представляют полугруппы левых нулей и прямоугольные связки соответственно. Это представление является неточным, поскольку нет редуктивности и сокращения. Поэтому стандартное отношение равенства $\mathbf{\Delta}$ заменяется на α-отношение $\mathbf{\Delta}_\alpha \leftrightarrow t - u \in \operatorname{Ann} \alpha$. Полугруппа $\mathbf{P}_\alpha$ обладает необычным свойством — она является регулярной, но не инверсной. Для нее также найдены отношения Грина: $\mathscr{L}$-эквивалентность совпадает с универсальным отношением, а $\mathscr{R}$-эквивалентность равна α-отношению $\mathbf{\Delta}_\alpha$ (а не $\mathbf{\Delta}$). Получено объединение однопараметрических полугрупп в некоторую нетривиальную полугруппу — скрученную прямоугольную связку, для которой выписана таблица Кэли и найдены все подполугруппы.

Рассматриваются суперматричные представления высших $(n|n)$-связок как обобщений прямоугольных связок, которые не могут быть сведены к произведению последних. Для них определяются высшие α-отношения $\mathbf{\Delta}_\alpha^{n|n}$, которым равны соответствующие $\mathscr{R}$-эквивалентности. Вычислены отношения Грина для $(n|n)$-связок и установлен смысл стандартных $\mathscr{R}, \mathscr{L}, \mathscr{D}, \mathscr{H}$-классов для суперматриц. Далее мы определяем более общие отношения $\mathscr{R}^{(i)}, \mathscr{L}^{(i)}, \mathscr{D}^{(i)}, \mathscr{H}^{(i)}$ и называем их тонкими отношениями эквивалентности. Такие обобщенные отношения Грина необходимы для описания всех возможных классов элементов в $(n|n)$-связках, пропущенных в стандартном подходе. Из тонких эквивалентностей мы можем получать также и все известные отношения. Например, в случае $(2|2)$-связки, $\mathscr{R}^{(1)} \cap \mathscr{R}^{(2)} = \mathscr{R}$, $\mathscr{L}^{(1)} \cap \mathscr{L}^{(2)} = \mathscr{L}$, но дополнительно находим *смешанные* отношения вида $\mathscr{H}^{(i|j)} = \mathscr{R}^{(i)} \cap \mathscr{L}^{(j)}$, $\mathscr{D}^{(i|j)} = \mathscr{R}^{(i)} \vee \mathscr{L}^{(j)}$ и высших порядков

$$\mathscr{H}^{(ij|k)} = \left(\mathscr{R}^{(i)} \cap \mathscr{R}^{(j)}\right) \cap \mathscr{L}^{(k)},\ \mathscr{D}^{(ij|k)} = \left(\mathscr{R}^{(i)} \cap \mathscr{R}^{(j)}\right) \vee \mathscr{L}^{(k)}.$$

Для каждого смешанного $\mathscr{D}$-класса мы можем построить смешанную eggbox диаграмму тонких $\mathscr{R}, \mathscr{L}$-классов, которая будет такой размерности, сколько слагаемых имеет в своей правой части заданное смешанное отношение. А именно, eggbox диаграммы $\mathscr{D}^{(i|j)}$-классов двумерны, а диаграммы $\mathscr{D}^{(ij|k)}$ и $\mathscr{D}^{(i|jk)}$-классов должны быть трехмерны. В случае $(n|n)$-связки необходимо рассматривать все возможные k-размерные eggbox диаграммы, где $2 \leq k \leq n-1$. Введенные тонкие отношения эквивалентности допускают подполугрупповую интерпретацию: стандартные отношения Грина на подполугруппе $\mathscr{U}$ полугруппы $\mathbf{S}$ имеют как свой аналог продолженные образы в $\mathbf{S}$, а именно тонкие отношения эквивалентности на $\mathbf{S}$.

В разделе “Перманенты, scf-матрицы и необратимая гиперболическая геометрия” детально исследованы свойства матриц, содержащих нильпотентные элементы и делители нуля, вполне определенный тип которых возникает при анализе N-расширенных редуцированных преобразований. Для таких матриц перманенты начинают играть дуальную (по отношению к детерминантам) роль, поэтому важно рассмотреть эти дуальные свойства в общем случае нильпотентных матриц, что может быть применено и в других моделях, использующих суперсимметрию в качестве основополагающего принципа.

Введено понятие scf-матрицы $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ из четных элементов, обладающих scf-свойством определенной ортогональности ее блоков между собой. В обратимом случае scf-матрицы подобны ортогональным матрицам. Так, для 2×2 матрицы scf-свойство состоит в ортогональности элементов столбцов, и для них имеет место дуальность между перманентом и детерминантом и между минорами и алгебраическими дополнениями

$$\operatorname{per} \mathrm{A}_{\mathrm{scf}} \leftrightarrow \det \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}, \quad \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{M} \leftrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{D}.$$

Сформулирован критерий обратимости scf-матриц в терминах перманентов, а не детерминантов. Предложена новая формула для per-обратной scf-матрицы, которая в обратимом случае имеет вид

$$\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1per} = \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{MT}}{\operatorname{per} \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}.$$

Отличие от стандартного случая возникает лишь для необратимых scf-матриц. Получены формулы, связывающие след, перманент и детерминант, а также формула Бине-Коши для перманентов

$$\operatorname{per}\left(\mathrm{A}_{\mathrm{scf}} \cdot \mathrm{B}_{\mathrm{scf}}\right) = \operatorname{per} \mathrm{A}_{\mathrm{scf}} \cdot \operatorname{per} \mathrm{B}_{\mathrm{scf}},$$

которая совпадает с аналогичной формулой для детерминантов только в случае scf-матриц. Определяется полугруппа scf-матриц $SCF\,(N)$, подгруппа которой изоморфна $O\,(N)$ и для которой найдены идеалы и условия обратимости при $N = 2$ и $N = 4$.

Далее предлагается использовать scf-матрицы для изучения дробно-линейных (обратимых и необратимых) преобразований суперпространств $\mathbb{C}^{1|0} \to \mathbb{C}^{1|0}$, называемых per-отображениями. Показано, что для per-отображений имеет место симметрия $\operatorname{per} \leftrightarrow \det$, $\quad \mathrm{Re} \leftrightarrow \mathrm{Im}$ во всех основных соотношениях гиперболической геометрии.

Найден новый инвариант per-отображений— правое двойное отношение $\boldsymbol{D}^{+}\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right)$, которое наряду с известным левым двойными отношениями $\boldsymbol{D}^{-}\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right)$ является следующей функцией четырех точек

$$\boldsymbol{D}^{\pm}\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right) = \frac{\left(z_1 \pm z_3\right)\left(z_2 \pm z_4\right)}{\left(z_1 \pm z_4\right)\left(z_2 \pm z_3\right)}.$$

Это приводит к новым морфизмам группы перестановок, зеркальной per-гармонической последовательности точек и к per-аналогу классической формулы Лаггера, а также функция, которую можно трактовать как per-аналог производной Шварца. Два двойных отношения дают два — правое и левое — гиперболических расстояния

$$\boldsymbol{d}^{\pm}\left(z_1, z_2\right) = \ln \boldsymbol{D}^{\pm}\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right).$$

В терминах правого двойного отношения $\boldsymbol{D}^{+}\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right)$ и правого расстояния $\boldsymbol{d}^{+}\left(z_1, z_2\right)$ можно последовательно построить per-аналог гиперболической геометрии и тригонометрии на комплексной суперплоскости или в многомерных комплексных суперпространствах.

В Заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В Приложениях приведены необходимые сведения по супералгебрам, отдельные аспекты теории супермногообразий и суперримановых поверхностей, дополнительные факты из теории полугрупп, а также некоторые выкладки, не вошедшие в основной текст.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ РАБОТЫ

1. Построена теория необратимых супермногообразий — полусупермногообразий, необратимых расслоений и гомотопий, что является основой математического аппарата суперсимметричных моделей элементарных частиц.

   а) Получена формулировка полусупермногообразий в терминах функций перехода, найдены обобщенные условия коцикла, новый тип ориентируемости.

б) Предложен общий принцип полукоммутативности для необратимых морфизмов.

в) Сформулированы необратимые аналоги расслоений — полурасслоения — в терминах уравнений на функции перехода, изучены морфизмы полурасслоений.

г) Введены полугомотопии с необратимым четным или нечетным суперпараметром.

2. Построена и исследована в терминах теории полугрупп необратимая суперконформная геометрия на суперплоскости, необходимая для формулировки суперструнных теорий элементарных частиц.

а) Построена суපераналитическая полугруппа и дано определение супераналитических полусупермногообразий.

б) Рассмотрены дополнительные редукции касательного суперпространства с учетом необратимости. Они приводят к обобщению понятия комплексной структуры на необратимый случай.

в) Найдены новые необратимые преобразования — сплетающие четность преобразования, которые дуальны суперконформным в смысле полученной формулы сложения березинианов и являются необратимым супераналогом антиголоморфных преобразований. Они вращают четность в касательном суперпространстве и приводят к появлению нового типа коциклов — сплетенных коциклов. Единым образом описаны оба типа редуцированных преобразований с помощью альтернативной параметризации, в которой переключение между ними производится введенным спином редукции, равным половина и $N/2$ для расширенных N-преобразований.

г) Построена $N=1$ суперконформная полугруппа, принадлежащая к новому абстрактному типу полугрупп, которые имеют необычную идеальную структуру. Определены обобщенные векторные и тензорные отношения Грина.

д) Исследованы дробно-линейные необратимые редуцированные преобразования в терминах полуминоров и полуматриц, для которых определены функции полуперманента и полудетерминанта (дуального корню из обычного детерминанта). Найдена четно-нечетная симметрия дробно-линейных $N = 1$ суперконформных преобразований, которая состоит в симметрии относительно одновременной замены детерминанта на полудетерминант и четных координат на нечетные.

е) Найдены необратимые супераналоги расстояния в $(1|1)$-мерном суперпространстве. Введен необратимый аналог метрики и показана ее полуинвариантность.

ж) Изучены нелинейные реализации $N = 1$ редуцированных преобразований и найден новый тип голдстино как решение, соответствующее сплетающим четность преобразованиям.

з) Исследована необратимая геометрия на $N = 2$ и $N = 4$ расширенной суперплоскости. Построены $N = 2$ и $N = 4$ суперконформные полугруппы в альтернативной параметризации. Обобщается на произвольное N понятие комплексной структуры на суперплоскости.

3. Построены суперматричные полугруппы и исследованы их идеальные свойства и нетривиальные редукции, применяемые в феноменологии суперсимметричных моделей элементарных частиц.

а) Найдено несколько возможностей объединить антитреугольные суперматрицы с треугольными в сэндвич-полугруппы с необычными свойствами.

б) Получены новые типы нечетных супермодулей и антитранспонирования, представления странной суперался Березина.

в) Введены нечетные аналоги собственных чисел, характеристических функций и сформулирована обобщенная теорема Гамильтона-Якоби.

4. Обнаружено, что полугрупповые связки непрерывно представляются суперматричными полугруппами антитреугольного вида.

а) Получено объединение однопараметрических полугрупп в некоторую нетривиальную полугруппу — скрученную прямоугольную связку.

б) Определены высшие связки и для них введены обобщения отношений Грина — тонкие и смешанные отношения эквивалентности. Для них построены многомерные диаграммы.

5. Исследованы необратимые свойства матриц, содержащих нильпотентные элементы и делители нуля и возникающих в N-расширенной суперконформной геометрии.

а) Найдена дуальность между перманентом и детерминантом и между минорами и алгебраическими дополнениями, предложена новая формула для обратной матрицы через перманент и миноры.

б) Изучены обратимые и необратимые дробно-линейные преобразования специального вида, для которых найден новый вид симметрии.

в) Построена необратимая гиперболическая геометрия на суперплоскости, в которой имеется два различных инвариантных двойных отношения и, соответственно, два расстояния.

Таким образом, проведенные исследования геометрических и симметрийных аспектов суперсимметричных и суперструнных моделей элементарных частиц, полученные конкретные аналитические и общенаучные результаты можно квалифицировать как новое научное направление, состоящее в построении новой модели элементарных частиц на основе более абстрактных категорных понятий и базовых внутренних структур.

К перспективам дальнейшего развития этого направления можно отнести поиск новых проявлений необратимых и полугрупповых свойств в современной теории суперструн и супермембран, продвижение в сторону конкретных расчетов возможных дополнительных вкладов в фермионные амплитуды и наблюдаемые, а также разработка общих принципов построения суперсимметричных моделей элементарных частиц на основе соответствующих теорий полугрупп.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Duplij S. *On semi-supermanifolds // Pure Math. Appl.* - 1998. - V. **9**. - № 3. - P. 117–143.

2. Duplij S. *On superconformal-like transformations and their nonlinear realization // Supersymmetries and Quantum Symmetries.* - Heidelberg: *Springer-Verlag*, 1998. - P. 243–251.

3. Duplij S. *On semigroup nature of superconformal symmetry // J. Math. Phys.* - 1991. - V. **32**. - № 11. - P. 2959–2965.

4. Duplij S. *On $N = 4$ super Riemann surfaces and superconformal semigroup // J. Phys.* - 1991. - V. **A24**. - № 13. - P. 3167–3179.

5. Duplij S. *Superconformal-like transformations and nonlinear realizations // Southwest J. Pure and Appl. Math.* - 1998. - № 2. - P. 85–112.

6. Duplij S. *Semigroup of $N = 1, 2$ superconformal transformations and* *conformal superfields* // Acta Phys. Pol. - 1990. - V. **B21**. - № 10. - P. 783–811.

7. Duplij S. *Towards gauge principle for semigroups* // Acta Phys. Pol. - 1992. - V. **B23**. - № 7. - P. 733–743.

8. Duplij S. *Some abstract properties of semigroups appearing in superconformal theories* // Semigroup Forum. - 1997. - V. **54**. - № 2. - P. 253–260.

9. Duplij S. *On an alternative supermatrix reduction* // Lett. Math. Phys. - 1996. - V. **37**. - № 3. - P. 385–396.

10. Duplij S. *Noninvertible N =1 superanalog of complex structure* // J. Math. Phys. - 1997. - V. **38**. - № 2. - P. 1035–1040.

11. Duplij S. *Supermatrix representations of semigroup bands* //Pure Math. Appl. - 1996. - V. **7**. - № 3-4. - P. 235–261.

12. Дуплий С. А. *Идеальная структура суперконформных полугрупп* // Теор. мат. физ. - 1996. - Т. **106**. - № 3. - С. 355–374.

13. Дуплий С. А. *Об $N = 1$ суперконформной инвариантности* // Ядерная физика. - 1990. - Т. **52**. - № 4(10). - С. 1169–1175.

14. Дуплий С. А. *О типах $N = 2$ суперконформных преобразований* // Теор. мат. физ. - 1991. - Т. **86**. - № 1. - С. 138–143.

15. Дуплий С. А. *Об $N = 2$ суперконформных преобразованиях* // Пробл. яд. физ. и косм. лучей. - 1990. - Т. **33**. - С. 22–38.

16. Дуплий С. А. *Нильпотентная механика и суперсимметрия* // Пробл. яд. физ. и косм. лучей. - 1988. - Т. **30**. - С. 41–49.

17. Дуплий С. А. *Поиски суперсимметричных партнеров на ускорителях высоких энергий.* **I** // Пробл. яд. физ. и косм. лучей. - 1985. - Т. **24**. - С. 82–96.

18. Дуплий С. А. *Поиски суперсимметричных партнеров на ускори-*

телях высоких энергий. **II** // *Пробл. яд. физ. и косм. лучей.* - 1986. - Т. **26**. - С. 1–22.

19. Duplij S. *Ideal structure of superconformal semigroups.* - Kaiserslautern: 1995. - 50 p. (*Preprint / Univ. Kaiserslautern*; KL-TH-95/4, CERN-SCAN-9503192).

20. Duplij S. *Noninvertibility and "semi-" analogs of (super) manifolds, fiber bundles and homotopies.* - Kaiserslautern: 1996. - 30 p. (*Preprint / Univ. Kaiserslautern*; KL-TH-96/10, q-alg/9609022).

21. Duplij S. *Nonlinear realization of $N = 1$ superconformal-like transformations.* - Kaiserslautern: 1998. - 15 p. (*Preprint / Univ. Kaiserslautern*; KL-TH 98/02).

АННОТАЦИЯ

Дуплий С. А. Полугрупповые методы в суперсимметричных теориях элементарных частиц.- Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности: 01.04.02 – Теоретическая физика.- Харьковский государственный университет, Харьков, 1999.

Диссертация посвящена абстрактным, геометрическим и симметрийным аспектам современной теории элементарных частиц. В работе развивается новое направление в построении суперсимметричных и суперструнных моделей, основанное на последовательном и строгом включении полугрупп, идеалов и необратимых свойств в исследование их математической структуры. Построена теория полусупермногообразий и необратимое обобщение суперконформной и гиперболической геометрий. Получены новые непрерывные суперматричные представления полугрупп. Проведенные исследования позволили сформулировать теоретическую модель элементарных частиц, основанную на суперсим-

метрии, в терминах более общих категорий и новых структур — как теорию суперматричных и абстрактных полугрупп, включающую предыдущие теории как частный обратимый вариант.

Ключевые слова: *суперсимметрия, супермногообразие, суперструна, суперконформное преобразование, нильпотент, четность, полугруппа, эквивалентность, идеал.*

ABSTRACT

Duplij S. A. Semigroup methods in supersymmetric theories of elementary particles.— Manuscript.

The thesis for the search of the scientific degree of a doctor of physical and mathematical sciences by speciality: 01.04.02 – Theoretical Physics.- Kharkov State University, Kharkov, 1999.

The thesis is devoted to abstract, geometric and symmetric aspects of modern theory of elementary particles. A new direction in constructing supersymmetric and superstring models based on consequent and strong consideration and inclusion of semigroups, ideals and noninvertible properties into their mathematical structure. A theory of semisupermanifolds and noninvertible generalization of superconformal and hyperbolic geometries are built. New continuous supermatrix representations of semigroups are obtained. The carried out investigations allowed us to formulate a theoretical model of elementary particles based on supersymmetry in terms of more general categories and new structures — as a theory of supermatrix and abstract semigroups which includes previous theories as a particular invertible case.

Keywords: *supersymmetry, supermanifold, superstring, superconformal transformation, nilpotent, parity, semigroup, equivalence, ideal.*

Различные вопросы, связанные с материалом диссертации, интенсивно и многократно обсуждались на конференциях и семинарах с такими учеными, как Ader J.-P., Aspinwall P., Cariñena J. F., Ćirić M., Comtét A., de Wit B., Deligne P., Duff M. J., Gates J., Grisaru M. T., Howie J. M., Kelarev A., Kupsch J., Lawson M. V., Lukierski J., Nieuwenhuizen P., O'Raifeartaigh L., Preston G. B., Rühl W., Rabin J. M., Schein B. M., Sezgin E., Stasheff J., Tucker R. W., Umble R., Wess J., Wightman A. S., Акулов В. П., Алексеевский Д. В., Аринкин Д., Бережной Ю. А., Бессмертный М. Ф., Ваксман Л. Л., Воронов А. А., Громов Н. А. Демичев А. П., Дринфельд В. Г., Зима В. Г., Капустников А. А., Куренной Г. Ч., Лейтес Д. А., Манин Ю. И., Меренков Н. П., Натанзон С. М., Новиков Б. В., Пашнев А. И., Синельщиков С. С., Смилга А. В., Степановский Ю. П., Фаддеев Л. Д., Фомин П. И., Хренников А. Ю., которым автор выражает искреннюю и глубокую благодарность за плодотворные дискуссии.

Автор считает своим долгом поблагодарить международный фонд им. Алексадра Гумбольда (Бонн) за финансовую поддержку и факультет теоретической физики университета г. Кайзерслаутерн (Германия), где была получена часть результатов, за гостеприимство и возможность проведения научных исследований.

WWW:

`http://www-home.univer.kharkov.ua/~duplij`

`http://gluon.physik.uni-kl.de/~duplij`

E-mails:

`Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua`

`duplij@member.ams.org`