Übungen zum Vorkurs: Mathematik für Anwender

WS 2004/2005 O. Willhöft Blatt 1

Aufgaben für zuhause, Abgabe: Mittwoch, den 15.9.2004, in den Übungsgruppen

1) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Polynome:

$$15x^2 + 7x - 30, \quad x^5 + 9x^4 - 7x^2 + 43x - 16.$$

2) Geben Sie für die folgenden Funktionsterme jeweils die maximale Teilmenge D von $\mathbb{R}$ an, so daß der Term eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ definiert und bestimmen Sie jeweils die Ableitung von f auf D:

$$\frac{2x+3}{17x+4}, \qquad \frac{5x-2}{3x^2-4x-1}.$$

3) Seien $\gamma, c \in \mathbb{R}$ gegeben und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := c \cdot \exp(\gamma x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

   a) Berechnen Sie $f^{(m)}$ für $m \in \mathbb{N}$.

   b) Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, daß gilt

$$a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f^{(1)} + a_0 f = \Big(a_n \gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \cdots + a_1\gamma + a_0\Big) \cdot f.$$

4) Das Polynom

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ besitze die Nullstelle γ.

Zeigen Sie, daß dann jede Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c \cdot \exp(\gamma x)$, mit $c \in \mathbb{R}$ fest, die Differentialgleichung

$$a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f^{(1)} + a_0 f = 0$$

löst.

Aufgabe für die Übungsgruppen:

Beweisen Sie: Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $f' = f$, die nicht die Nullfunktion ist, dann ist f keine rationale Funktion.

Hinweise für einen möglichen Lösungsweg:

- Man setze die Gradfunktion durch
$$\deg\left(\frac{p}{q}\right) := \deg p - \deg q$$
von den Polynomen auf die rationalen Funktionen fort.
- Man zeige (unter Verwendung der Quotientenregel der Differentialrechnung), daß für jede rationale Funktion r ungleich der Nullfunktion gilt $\deg(r') < \deg r$.
- Man schließe zuletzt wie im Beweis von Feststellung 1 in der Vorlesung.