

# Übungen zum Vorkurs Mathematik für Anwender

## Übungsblatt 6

---

### Aufgabe 14:

Sei  $a$  eine feste reelle Zahl. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} - a.$$

- a) Berechnen Sie die Ableitung und die Nullstellen von  $f$ .
- b) Angenommen, Sie wollen  $\frac{1}{a}$  berechnen. Sie haben eine Näherung  $x_0$ . Wie sieht die Newton–Näherung in diesem Fall aus?
- c) Wir setzen  $a = 10.1$  und  $x_0 = 0.1$ . Berechnen Sie die Näherung für diesen Fall.
- d) Tragen Sie  $f$  und die Tangente von  $f$  im Punkt  $x_0$  in eine Grafik ein (falls möglich, benutzen Sie dazu eins der von uns angebotenen Programme, ansonsten zeichnen Sie). Wählen Sie den Maßstab so, dass  $x_0$  und die Nullstellen von  $f$  und der Tangente noch gerade im Koordinatensystem liegen.

Bemerkung: Dies Verfahren ist ein (auf vielen Prozessoren tatsächlich genutzter) einfacher Weg, um den Kehrwert einer Zahl zu berechnen: Zunächst wird in einer Tabelle ein ungefährer Wert gesucht, anschliessend wird dieser Wert mit dem Newton–Verfahren verbessert.

### Aufgabe 15:

Eine zentrale Eigenschaft der Ableitung einer Funktion  $f$  im Punkt  $x_0$  ist: In einer sehr kleinen Umgebung um den Punkt  $x_0$  verhält sich die Funktion  $f(x)$  wie eine lineare Funktion  $ax + b$ , die Ableitung im Punkt  $x_0$  nennen wir dann  $a$ . Wir nutzen diese Eigenschaft insbesondere für das Newton–Verfahren.

Für viele Anwendungen hat man nicht Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , sondern Funktionen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ . Natürlich möchte man auch hier eine vernünftige Ableitung definieren. Wie muss man das tun, wenn man die obige zentrale Eigenschaft erhalten möchte?

Wie sähe das Newton–Verfahren in diesem Fall aus?

### Aufgabe 16:

Lösen Sie das Tomographie–Problem aus der Vorlesung:

Auf einem Tisch sind 4 Würfel in einem Quadrat (s.u.) zusammengestellt. Die Würfel haben unterschiedliche Materialeigenschaften  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$ . Sie können nicht die einzelnen Werte, sondern nur Summen von Werten messen, und zwar  $\alpha_0 + \alpha_1 = b_0$ ,  $\alpha_2 + \alpha_3 = b_1$ ,  $\alpha_0 + \alpha_1 = b_2$  und  $\alpha_0 + \alpha_3 = b_3$ . Bestimmen Sie die einzelnen Werte.

$\alpha_0$	$\alpha_1$
$\alpha_2$	$\alpha_3$

### Aufgabe 17:

Es ist bekannt, dass ein eingestrahlter Röntgenstrahl in einem Material auf 10 cm Länge 30% seiner Intensität verliert. Bei einer Messung hat der Strahl in einem Werkstück 72% seiner Intensität verloren. Bestimmen Sie die Länge des Strahldurchgangs durch das Werkstück.