Information für Studierende zum Inhalte der Prüfung im Modul
“Mathematik vermitteln und vernetzen” (Modul 5)
im Zwei-Fach-Bachelor nach dem LABG 2009

(Stand: 06/2018)

Die Anmeldung zu dieser Prüfung erfolgt zentral über

> https://www.uni-muenster.de/FB10/Studium/studienhinweise/muendlichepruefungenmodul5_zfbmathe_undmodul4_bscmathe_/index.html.

Auf dieser Seite findet sich auch weitere Information zur Prüfungsanmeldung. Beachten Sie bitte, dass Sie sich hier frühzeitig (vor dem 31.12. für eine Prüfung im Frühjahr bzw. vor dem 30.6. für eine Prüfung im Herbst) anmelden müssen, damit Ihnen ein Prüfer zugeteilt werden kann.

Inhalt dieser Prüfungen sind die Grundlagen der Analysis und der linearen Algebra wie sie im ersten Studienjahr in der Vorlesungen Analysis I&II, Lineare Algebra I und Geometrische Lineara Algebra wie sie standardmäßig in Münster gelesen werden. Die Geometrische Lineare Algebra kann durch die Lineare Algebra II ersetzt werden. Im folgenden finden sich Zusammenstellungen der wichtigsten Themen dieser Vorlesungen. Die Zusammenstellungen sind größtenteils in Form von Fragen gegeben, die Sie sich bei der Vorbereitung zur Prüfung anhand Ihres Vorlesungsmanuskripts oder mit Hilfe anderer Quellen selbst beantworten sollten. Die Fragen könnten (müssen aber nicht) in ähnlicher Form als Fragen in Ihrer Prüfung gestellt werden. Sie sollten bei den Recherchen zu den Antworten also auch immer das jeweilige Umfeld mit anschauen und sich die Zusammenhänge und die Beweisideen zu den entsprechenden Sätzen der Vorlesung klar machen.

Die Übersichten sind thematisch in Paragraphen gegliedert, die natürlich in keiner Weise mit den Paragraphen der von Ihnen besuchten Vorlesungen übereinstimmen müssen. Vermutlich wurden die Themen aber in einer ähnlichen Reihenfolge in Ihren Vorlesungen abgehandelt!

Die Übersichten sind als Hilfestellungen gedacht und erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Die verwendete Notation in den Übersichten weicht möglicherweise in Teilen von der in Ihrer Vorlesung verwendeten Notation ab. **Über den genauen Ablauf der Prüfungen und eventuellen Schwerpunktsetzungen sollten Sie sich beim Prüfer informieren, sobald dieser feststeht**

Themen der Vorlesungen Analysis I&II als Grundlage zur Prüfungsvorbereitung

von Siegfried Echterhoff

Liebe Studierende,

im folgenden finden Sie eine Zusammenstellung der wichtigsten Themen aus den Vorlesungen Analysis I&II wie sie standardmäßig in Münster gelesen werden. Die Zusammenstellung ist größtenteils in Form von Fragen gegeben, die Sie sich bei der Vorbereitung zur Prüfung anhand Ihres Vorlesungsmanuskripts oder mit Hilfe anderer Quellen selbst beantworten sollten. Die Fragen könnten (müssen aber nicht) in ähnlicher Form als Fragen in Ihrer Prüfung gestellt werden. Sie sollten bei den Recherchen zu den Antworten also auch immer das jeweilige Umfeld mit anschauen und sich die Zusammenhänge und die Beweisideen zu den entsprechenden Sätzen der Vorlesung klar machen.

Ich habe die Übersicht thematisch in Paragraphen gegliedert, die natürlich in keiner Weise mit den Paragraphen der von Ihnen besuchten Vorlesungen übereinstimmen müssen. Vermutlich wurden die Themen aber in einer ähnlichen Reihenfolge in Ihrer Vorlesung abgehandelt!

§1 Aussagenlogik, vollständige Induktion. Was ist ein mathematischer Beweis? Verknüpfungen von Aussagen und indirekte Beweise. Vollständige Induktion. Wichtige Formeln die mit vollständiger Induktion bewiesen werden: $\sum_{l=1}^{n} l = \frac{n(n+1)}{2}$ sowie die geometrische Summe:

$$\sum_{l=0}^{n} z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \quad (\text{falls } z \neq 1)$$

und die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

§2 Mengen und Abbildungen. Hier wurden die wichtigsten Begriffe aus der Mengenlehre (Durchschnitt, Vereinigung und Komplemente von Mengen) sowie der Begriff einer Abbildung zwischen zwei Mengen eingeführt. Wichtige Begriffe: Wann heißt eine Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv? Wann besitzt eine Abbildung eine Umkehrabbildung? Wie sind das Urbild $f^{-1}(B)$ und das Bild $f(A)$ für Teilmengen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ einer Abbildung $f : X \to Y$ definiert?

Wann heißt eine Menge abzählbar oder überabzählbar? Geben Sie Beispiele für abzählbare und überabzählbare Mengen. (Wie sieht es z.B. mit $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ aus?) Welche Regeln kennen Sie für die Abzählbarkeit von Mengen? Kennen Sie das Cantorsche Diagonalverfahren?

§3 Die reellen Zahlen. Was ist ein archimedisch angeordneter Körper? Welche Beispiele für archimedisch angeordnete Körper kennen Sie? Welche Axiome charakterisieren die reellen Zahlen? Erklären Sie insbesondere das Vollständigkeitsaxiom! Gilt dies auch für die rationalen Zahlen? Geben Sie ein Beispiel für eine reelle Zahl, die nicht rational ist. Wie sind das Infimum, Supremum, Minimum, Maximum einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert? Wann existieren diese? Erklären Sie das Intervallschachtelungsprinzip. Zeigen Sie die Existenz von Quadratwurzeln positiver reeller Zahlen.

§4 Komplexe Zahlen. Wie ist der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen definiert? Welchen Vorteil bietet das Rechnen mit komplexen Zahlen gegenüber reellen Zahlen? Kann es eine Anordnung auf $\mathbb{C}$ geben? Geben Sie eine geometrische Interpretation der Addition in $\mathbb{C}$. Später mit Hilfe der Exponentialfunktion bzw. der Sinus- und Kosinusfunktionen: Geben Sie eine geometrische Deutung der Multiplikation in $\mathbb{C}$. Wie berechnet man die der n-ten Einheitswurzeln bzw. die n-ten Wurzeln einer beliebigen komplexen Zahl $a \in \mathbb{C}$. Erklären Sie die entsprechenden Formeln.

§5 Konvergente Folgen. Was ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einer Menge X? Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$). Wann heißt $a \in \mathbb{R}$ (bzw. $a \in \mathbb{Q}$ oder $a \in \mathbb{C}$) Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wann heißt eine Folge konvergent? Welche Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen kennen Sie?

Was ist eine Cauchy-Folge? Sind Cauchy-Folgen immer konvergent (beachten Sie für diese Frage Folgen in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)?

Was ist eine Teilfolge einer Folge. Geben Sie Beispiele von Folgen, die konvergente Teilfolgen besitzen, und von Folgen, die keine konvergenten Teilfolgen besitzen. Was ist ein Häufungspunkt einer Folge? Was sagt der Satz von Bolzano-Weierstrass? Können Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass beweisen? Wie sind der Limes-Inferior und der Limes-Superior einer (beschränkten) reellen Folge definiert?

§6 Konvergente Reihen. Wann heißt eine Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ konvergent? Wie lautet das Cauchy-Kriterium für konvergente Reihen? Wann heißt eine Reihe absolut konvergent? Ist jede absolut-konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ konvergent? (Begründung oder Gegenbeispiel!) Ist jede konvergente Reihe auch absolut konvergent? (Begründung oder Gegenbeispiel!) Geben Sie interessante Beispiele für konvergente oder divergente Reihen. Welche weiteren Konvergenzkriterien für Reihen kennen Sie? Können Sie diese herleiten (insbesondere Majoranten-, Quotienten- und Wurzelkriterium). Kennen Sie eine Formel für das Produkt $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$ zweier absolut konvergenter Reihen? Was besagt der Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen?

§7. Stetige Funktionen. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Wann heißt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ (bzw. $f : D \to \mathbb{C}$) stetig in einem Punkt $x_0 \in D$? Wann heißt f stetig? Geben Sie Charakerisierungen/Definitionen von Stetigkeit mit Hilfe von Folgen und mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$-Kriteriums. Warum sind diese äquivalent? Geben Sie Beispiele für stetige und nicht-stetige Funktionen. Wie lautet der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. Können Sie diesen beweisen? Unter welchen Voraussetzungen nehmen stetige Funktionen immer ihr Minimum oder Maximum an? Kennen Sie den Beweis/die Beweisideen für den entsprechenden Satz?

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Ist dann auch $f(I)$ ein Intervall? Ist $f([a, b])$ immer ein kompaktes Intervall? Sei $f : I \to J \subseteq \mathbb{R}$ stetig und bijektiv. Ist dann auch $f^{-1} : J \to I$ wieder stetig?

Wann heißt eine Funktion gleichmäßig stetig? Geben Sie Voraussetzungen an, unter denen eine stetige Funktion automatisch gleichmäßig stetig ist. An welcher Stelle in der Analysis ist dieser Satz wichtig?

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und sei a ein Häufungspunkt von D (was heißt das?). Wann existiert der Funktionen-Limes $\lim_{x\to a} f(x)$ (Definition!)? Wie hängt der Funktionen-Limes mit Stetigkeit von f im Punkt a zusammen, wenn $a \in D$? Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, für die der Limes $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht existiert und begründen Sie, dass dies so ist.

§8 Differenzierbarbeit. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $x_0 \in I$. Wann heißt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (bzw. $f : I \to \mathbb{C}$) differenzierbar im Punkt x_0, wann heißt sie differenzierbar? Wie ist die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 definiert? Geben Sie eine geometrische Interpretation der Ableitung $f'(x_0)$. Welche Rechenregeln kennen Sie für differenzierbare Funktionen und deren Ableitungen (Summen-, Produkt- und Kettenregel, Regel über Umkehrfunktionen)? Ist jede stetige Funktion differenzierbar? Ist jede differenzierbare Funktion stetig? (Begründung oder Gegenbeispiel!)

Formulieren Sie den Satz von Rolle, den ersten Mittelwertsatz und den zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Welche Beziehungen gibt es zwischen diesen Sätzen? Beweisen Sie den Satz von Rolle und den ersten Mittelwertsatz.

Geben Sie Anwendungen der Differentialrechnung zu Fragen der Monotonie einer Funktion (wo ist sie (streng) monoton wachsend/fallend) und zur Existenz und Berechnung von lokalen Extrema. Erklären Sie, wie diese Anwendungen aus den Mittelwertsätzen etc. folgen! Wie lautet die Regel von l'Hospital?

Hinweis: Manche Kollegen/Kolleginnen betrachten Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen nur auf **offenen** Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$!

§9. Konvergenz von Funktionenfolgen. Sei D eine Menge und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ (bzw. $f_n : D \to \mathbb{C}$) eine Funktion. Wann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ (bzw. $f : D \to \mathbb{C}$), wann konvergiert sie gleichmäßig gegen f? Ist jede punktweise konvergente Folge auch gleichmäßig konvergent (Begründung oder Gegenbeispiel)? Ist jede gleichmäßig konvergente Folge punktweise konvergent (Begründung oder Gegenbeispiel)? Seien nun alle f_n stetig und sei f punktweiser Limes der $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ist dann auch f stetig (Begründung oder Gegenbeispiel)? Sind alle f_n stetig und ist f der gleichmäßige Limes der f_n, ist dann auch f stetig (Begründung oder Gegenbeispiel)?

Später: Kennen Sie Sätze über die Vererbbarkeit der Differenzierbarkeit bzw. der Integrierbarkeit von den f_n auf die Grenzfunktion f? Wie hängt dann die Ableitung bzw. das Integral von f von den Ableitungen bzw. den Integralen der f_n ab?

§10. Potenzreihen. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ eine (reelle oder komplexe) Potenzreihe. Wie ist der Konvergenzradius $R \geq 0$ der Reihe definiert? Wie kann man R berechnen?

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und sei $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{C}$ die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$. Ferner betrachte für alle $n \in \mathbb{N}$ das Polynom $f_n : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{C}; f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$. Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ immer punktweise gegen f? Auf welchen Teilmengen von $(x_0 - R, x_0 + R)$ konvergiert die Folge sogar gleichmäßig? Ist f stetig und/oder differenzierbar? Kennen Sie eine Formel für die Ableitung von f? Geben Sie Beispiele von wichtigen Funktionen, die durch Potenzreihen dargestellt werden!

§11. Exponentialfunktion, Sinus- und Kosinusfunktion, der Logarithmus. Wie ist die Eulerzahl e definiert? Geben Sie mindestens zwei verschiedene Definitionen der

Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gibt es auch eine komplexe Version $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Exponentialfunktion? Wie lautet die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion? Können Sie diese begründen?

Ist die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig oder differenzierbar? Wenn ja, wie lautet die Ableitung? Wo ist die Exponentialfunktion monoton wachsend/fallend? Was ist der Bildbereich $\exp(\mathbb{R})$ der reellen Exponentialfunkton? Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = a^x$ für ein festes $a \in (0, \infty)$? Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$.

Wie ist der natürliche Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert. Welche Rechenregeln gelten für den natürlichen Logarithmus? Wie ist der Zusammenhang zwischen dem natürlichen Logarithmus ln und dem Logarithmus $\log_a$ zur Basis $a > 0$?

Wie sind die Sinus- und Kosinusfunktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert? Gibt es einen Zusammenhang zur Exponentialfunktion? Wie lauten die Nullstellen von sin, cos, wie ist der Funktionsverlauf (Skizze!)? Auf welchen Bereichen sind sin, cos monoton wachend/fallend und wo liegen die lokalen Extrema? Sind $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar? Geben Sie eine geometrische Deutung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ im Einheitskreis der komplexen Zahlen!

§12. Das Riemann Integral oder das Regelfunktionenintegral Wann heißt eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar (die Antwort kann variieren, je nachdem ob in Ihrer Vorlesung das Riemann-Integral (wie im Buch Analysis I von Fischer) oder das Integral für Regelfunktionen (wie im Buch von Königsberger) eingeführt wurde). Was ist die geometrische Bedeutung des Integrals? Ist jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar? (Begründung!)

Was ist eine Stammfunktion einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$? Wieviele verschiedene Stammfunktionen kann es für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ geben? Formulieren Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Können Sie diesen Satz auch beweisen? Erklären Sie die Regeln zur partiellen Integration und die Substitutionsregel. Geben Sie jeweils ein Beispiel für ein Integral, dass Sie mit diesen Regeln berechnen können.

Können Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = \int_0^{\sin(x)} e^t \, dt$ berechnen?

Wie ist das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t) \, dt$ für eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definiert? Wann existiert dieses Integral? Wie lautet das Reihenvergleichskriterium für uneigentliche Integrale $\int_0^\infty f(t) \, dt$?

§13. Rektifizierebare Kurven im $\mathbb{R}^n$. Was ist eine parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^n$? Wann heißt eine solche Kurve rektifizierter? Berechnen Sie die Bogenlänge einer stetig-differenzierbaren parametrisierten Kurve. Können Sie die hier benutzte Formel begründen?

§14. Taylorformel und Taylorreihen. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $n+1$-mal stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in I$. Wie lautet das n-te Taylor-Polynom $T_n f$ von f mit Entwicklungspunkt x_0? Geben Sie mindestens eine Formel für den Fehler $R_n(f)(x) := f(x) - T_n f(x)$.

Sei nun f unendlich oft differenzierbar. Wie ist dann die Taylor-Reihe Tf von f im Entwicklungspunkt x_0 definiert. Wann konvergiert diese Reihe gegen f? Wie lauten die Taylor-Reihen der Funktionen $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt 0 und wo konvergieren diese gegen die gegebenen Funktionen? Wie lauten die Tayler-Reihen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x}$ und $f(x) = \ln(1-x)$ im Entwicklungspunkt 0? Wo konvergieren diese gegen f?

Ist die folgende Aussage wahr: Konvergiert die Taylor-Reihe $Tf(x)$ in einem Punkt x, so konvergiert sie dort gegen $f(x)$?

§15. Metrische Räume. Sei $\emptyset \neq X$ eine Menge. Was ist eine Metrik $d : X \times X \to [0, \infty)$? Ist d eine Metrik auf X, wie sind dann die offenen und abgeschlossenen Kugeln in X bezüglich d definiert und wann heißt eine Teilmenge von X offen oder abgeschlossen? Sind beliebige Vereinigungen/Schnitte offener (bzw. abgeschlossener) Mengen wieder offen (bzw. abgeschlossen). Wie sieht es mit endlichen Verdingungen/Schnitten aus? Gibt es Teilmengen von X die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind? Gibt es Teilmengen, die weder offen noch abgeschlossen sind?

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wann konveniert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen ein $x \in X$ bezüglich d? Hängt Konvergenz von der Wahl der Metrik ab? Kennen Sie Beispiele verschiedener Metriken auf einem Raum X und einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X die bezüglich einer der Metriken konvergiert, bezüglich der anderen aber nicht? Wann heißt eine Teilmenge $K \subseteq X$ kompakt? Geben Sie eine Charakterisierung durch Überdeckungen und eine Charakterisierung mit Folgen. Können Sie die Äquivalenz dieser beiden Charakterisierungen beweisen? Zeigen Sie, dass abgeschlossene Teilmengen kompakter metrischer Räume wieder kompakt sind und das kompakte Teilmengen eines metrischen Raums immer abgeschlossen und beschränkt sind. Geben Sie ein Beispiel einer Teilmenge D eines metrischen Raums X, mit D abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt!

Seien nun (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Wann heißt eine Abbilldung $f : X \to Y$ stetig in einem Punkt $x_0 \in X$? Wann heißt sie stetig oder gleichmäßig stetig? Geben Sie eine Charakterisierung der Stetigkeit von f mit Hilfe von offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen von Y und X.

Sei V ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum. Was ist eine Norm auf V? Wie ist die durch eine Norm $\|\cdot\|$ induzierte Metrik auf V definiert? Wann heißen zwei Normen äquivalent? Geben Sie mindestens zwei verschiedene Beispiele für Normen auf $\mathbb{R}^n$. Sind diese äquivalent? Gibt es Normen auf $\mathbb{R}^n$, die zu den gegebenen Beispielen nicht äquivalent sind? Beschreiben Sie Konvergenz von Folgen bezüglich einer gegebenen Norm. Hängt die Konvergenz einer Folge in einem Vektorraum V von der gewählten Norm ab (unterscheiden Sie hier endlich-dimensionale und unendlich-dimensionale Vektorräume)? Wie hängt Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ bezüglich einer gegebenen Norm mit der Komponenten-weisen Konvergenz zusammen? Geben Sie eine einfache Beschreibung kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Geben Sie Beispiele für stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Geben Sie mindestens ein Beispiel für einen unendlich-dimensionalen vollständigen normierten Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wie lautet der Banachsche Fixpunkt-Satz?

§16. Differenzierbare Funktionen in mehreren Variablen. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Wann heißt f in einem Punkt x_0 differenzierbar? (Oft auch *total differenzierbar* genannt!) Wie ist dann die Ableitung $Df(x_0)$ an der Stelle x_0

definiert? Wie hängt dieser Ableitungsbegriff mit dem in der Analysis I eingeführten Begriff im Fall $n = 1$ zusammen? Wie lautet die Kettenregel für differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher?

Wie sind die Richtungsableitungen und die partiellen Ableitungen von f an der Stelle x_0 definiert? Wie stehen diese im Zusammenhang zur Ableitung $Df(x_0)$, falls diese existiert. Wann heißt eine Funktion stetig (partiell) differenzierbar? Welche Implikationen gibt es zwischen Stetigkeit, Differenzierbarkeit, partielle Differenzierbarkeit, stetig partielle Differenzierbarkeit? Sie Gegenbeispiele für die Implikationen zwischen den oben genannten Begriffen, die nicht gelten? (Beispiel: Sollten Sie der Meinung sein, dass aus stetig partieller Differenzierbarkeit nicht die Differenzierbarkeit folgt, so sollten Sie dies mit einem Beispiel belegen können). Wie lautet der Schrankensatz für stetig differenzierbare Funktionen? Was ist der Gradient einer (partiell) differenzierbaren Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in U$? Welche geometrische Deutung besitzt der Gradient?

Wann heißt eine Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ k-mal (stetig) partiell differenzierbar? Unter welchen Voraussetzungen an f darf man die Reihenfolge der Variablen, nach denen differenziert wird, bei höheren partiellen Ableitungen vertauschen? Wie lautet die Taylor-Formel für eine $(n + 1)$-mal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$? Geben Sie insbesondere die Formel für das zweite Taylor-Polynom von f an. Wie ist die Hesse-Matrix von f im Punkt $x_0 \in U$ definiert, und was zeichnet sie aus (wenn f "schön genug")? Geben Sie notwendige und hinreichende Kriterien dafür an, dass eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in U$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum besitzt (was ist das überhaupt?).

§17. Der Satz über implizite Funktionen. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und sei $F : U \times V \to \mathbb{R}^m$ eine stetig (partiell) differenzierbare Funktion. Wie lautet der Satz über implizite Funktionen für eine solche Funktion F und für einen Punkt $(a, b) \in U \times V$? Können Sie diesen Satz im Fall $n = m = 1$ durch eine Skizze erläutern? Sei $g : U \to V$ eine Funktion mit $g(a) = b$ und $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$. Können Sie die Ableitung von g an der Stelle a mit Hilfe der Ableitung von F an der Stelle (a, b) ausdrücken? Welche Voraussetzungen an F sind hierfür nötig?

Wie lautet der Satz über die lokale Umkehrfunktion bzw. der Satz der offenen Abbildung für Funktionen $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? Wie hängen diese Sätze mit dem Satz über implizite Funktionen zusammen?

Für sehr gute Kandidaten: Können Sie den Beweis des Satzes über implizite Funktionen erklären?

Wie berechnet man lokale Extrema unter Nebenbedingungen?

Themen der Vorlesungen „Lineare Algebra I“, sowie „Geometrische LA“ als Grundlage zur Prüfungsvorbereitung

von Urs Hartl[1] und Lutz Hille

Lineare Algebra I

§1 Vektorräume

Wann heißen Vektoren linear (un-)abhängig? Was ist eine Basis eines Vektorraums? Bei endlich erzeugten Vektorräumen ist äquivalent: Basis, minimales Erzeugendensystem, maximales linear unabhängiges System (warum?).
Was besagt der Steinitzsche Austauschsatz? Wozu braucht man ihn? (Antwort: Jede Basis hat die gleiche Länge!) Was besagt der Basisergänzungssatz? Was ist die Dimension eines Vektorraums? Wieso ist sie wohldefiniert? Weshalb ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$? (eine Basis des $\mathbb{R}^n$ angeben) Kennen Sie ein Beispiel eines ∞-dimensionalen Vektorraumes (z.B. $K[X]$)?
Was ist ein Untervektorraum? Mit welchem Kriterium kann man Untervektorräume erkennen? Dimensionsformel für Untervektorräume: $\dim(U+V)+\dim(U\cap V) = \dim U + \dim V$ (Beweis?). Geometrische Deutung der Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$. Definition direkte Summe von Untervektorräumen.

§2 Homomorphismen, lineare Abbildungen

Definition Homomorphismus, Isomorphismus, Ker und Bild. Warum sind Ker f und Bild f Untervektorräume? Warum gilt f injektiv $\iff$ Ker $f = \{0\}$. Dimensionsformel (Rangsatz) für Homomorphismus $f : V \to W$ besagt: dim Bild f + dim Ker f = dim V. (Beweisidee: Ergänze eine Basis von Ker f nach Steinitz zu einer Basis von V.) Anwendung des Rangsatzes: $f : V \to V$ Homomorphismus, V endlich dimensional. Dann ist f injektiv $\iff$ f surjektiv (Beweis! Was heißt surjektiv, injektiv?). Gegenbeispiel, dass dies für $f : V \to W$ nicht immer gilt und außerdem nicht für $f : V \to V$ bei $\dim V = \infty$ (z.B. $V = K[X]$, f bildet $\sum a_i X^i$ ab auf $\sum a_i X^{i+1}$). Ein Homomorphismus $f : V \to W$ ist schon eindeutig durch die Bilder $f(v_i)$ definiert, wenn $\{v_i\}$ eine Basis von V ist. Wieso ist jeder n-dimensionale K-Vektorraum isomorph zu K^n?

§3 Matrizen

Beziehung zwischen linearen Abbildungen $f : V \to W$ und Matrizen bei fest vorgegebenen Basen $\mathscr{B}$ von V und $\mathscr{C}$ von W kennen: Matrix ${}_{\mathscr{C}}[f]_{\mathscr{B}}$ aufstellen können, Koordinatenvektor ${}_{\mathscr{B}}[v]$ eines Vektors $v \in V$, Formel ${}_{\mathscr{C}}[f(v)] = {}_{\mathscr{C}}[f]_{\mathscr{B}} \cdot {}_{\mathscr{B}}[v]$ beweisen, Komposition von linearen Abbildungen durch Matrizen ausdrücken, Was passiert beim Wechseln der Basis? Weshalb definiert man das Matrizenprodukt so komisch? (Antwort: Weil bei dieser eindeutigen Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen das Matrizenprodukt der Hintereinanderschaltung der Abbildung entspricht.) Rechenregeln für Matrizen, Transponieren. Wenn $f : V \to V$ Homomorphismus ist, $\mathscr{B}$ und $\mathscr{B}'$ basen von V sind und $S = {}_{\mathscr{B}'}[\mathrm{id}_V]_{\mathscr{B}}$ die Basiswechselmatrix, dann ist ${}_{\mathscr{B}'}[f]_{\mathscr{B}'} = S \cdot {}_{\mathscr{B}}[f]_{\mathscr{B}} \cdot S^{-1}$ (d. h. die Matrizen sind ähnlich). Warum ist das Matrizenprodukt assoziativ? Ist es kommutativ?

Rang einer Matrix kennen (Zeilenrang = Spaltenrang, ungefähre Beweisidee: z.B. durch elementare Umformungen, oder mithilfe des Dualraums). Wissen, dass dim Bild f = Rang

[1]Dieser Text wurde auf Basis einer Vorlage von Prof. Dr. Dr. Klaus Langmann erstellt.

${}_{\mathscr{C}}[f]_{\mathscr{B}}$ (denn das Bild des Homomorphismus $K^n \to K^m, x \mapsto Ax$ wird von den Spaltenvektoren von A erzeugt!) Bei einer vorgegebenen Matrix Rang, Kern und Bild bestimmen. Matrix A invertierbar $\iff$ A quadratische $n \times n$-Matrix und Rang $A = n$. Weitere äquivalente Kriterien für Invertierbarkeit. Inverse Matrix mittels elementarer Umformungen berechnen können. Zusammenhang von elementaren Umformungen mit Elementarmatrizen.

§4 Lineare Gleichungen

Homogenes Gleichungssystem. Wann hat dies nichttriviale Lösungen? Inhomogenes Gleichungssystem $Ax = b$: Wie bekommt man **alle** Lösungen, wenn man **eine** Lösung x_0 kennt? (Antwort: Lösungsmenge $= \{x_0 + x$, wobei x alle Lösungen des homogenen Systems durchläuft $\}$.) Wie sieht geometrisch die Lösungsmenge aus? Gibt es ein Gleichungssystem über $\mathbb{R}$, dessen Lösungsmenge aus endlich vielen n-Tupeln besteht? Wie löst man ein Gleichungssystem? Wann gibt es überhaupt eine Lösung? (Betrachte Rang der erweiterten Matrix, oder deren Zeilenstufenform.) Wann ist diese Lösung eindeutig? (Rang Matrix $=$ $n =$ Anzahl der Unbekannten.) Wann ist Gleichungssystem universell lösbar (Rang Matrix $= m =$ Anzahl der Gleichungen.) Man mache sich diese Aussagen klar, indem man die Ausgangsmatrix A nach §2 mit der linearen Abbildung $f : K^n \to K^m$ identifiziere: dann heißt lösbar, dass $b \in$ Bild f; eindeutig lösbar, dass Ker $f = 0 \underset{\text{(Rangsatz)}}{\iff}$ dim Bild $f =$ dim K^n; universell lösbar, dass Bild $f = K^n$. Welche Dimension hat die Lösungsmenge?
Bei Gleichungsanzahl = Variablenanzahl ist äquivalent: Eindeutig lösbar $\iff$ universell lösbar $\iff$ Matrix invertierbar $\iff$ Determinante $\neq 0$. In diesem Fall die Cramersche Regel kennen! Warum ist die Cramersche Regel zum Lösen ungeeignet?

§5 Determinante

Definition der Determinanten kennen (z.B. sie ist die eindeutig bestimmte multilineare, alternierende und normierte Abbildung vom Vektorraum der $n \times n$-Matrizen nach K). Entwicklungssatz nach Zeile oder Spalte kennen. Leibniz-Formel $\det = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ kennen. (Bedeutung der Leibniz-Formel: Existenz der oben definierten Determinante. Außerdem sieht man damit, dass $\chi_f = \det(X\,\mathrm{id}_V - f)$ ein Polynom ist.) $\det AB = \det A \cdot \det B$ mit Beweis kennen. Gilt auch $\det(A+B) = \det A + \det B$? Was ist $\det(\lambda A)$ für $\lambda \in K$? Determinante eines Homomorphismus $f : V \to V$ definiert über Determinante der zugehörigen Matrix. (Bei anderer Basis erhalten wir aber eine andere Matrix, nämlich SAS^{-1}. Wieso ist $\det f$ wohldefiniert?) Wissen, dass $\det f \neq 0$ genau dann, wenn f Isomorphismus ist. Warum gibt es keine Determinante eines Homomorphismus $f : V \to W$, selbst dann nicht, wenn $\dim V = \dim W$ ist?

Lineare Algebra II

§6 Eigenwerte

Definition Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum. Geometrische Veranschaulichung! Beispiel eines Homomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ohne Eigenwerte (z.B. Drehung!). Wie findet man Eigenwerte (Antwort: Als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_f = \det(X \operatorname{id}_V - f)$. Warum stimmt das?) Hat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ immer Eigenwerte? (Antwort: Ja, denn ein Polynom vom Grad 3 hat immer eine reelle Nullstelle. Weshalb?) Kann es eine Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ohne Eigenwerte geben? Wie findet man die zugehörigen Eigenvektoren? (Antwort: in Ker $(f - \lambda \operatorname{id}_V)$, wenn λ Eigenwert ist.) Warum sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig? Was ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ? (Antwort: $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$). Was ist die algebraische Vielfachheit von λ? (Antwort: Exponent von $(X - \lambda)$ in der Faktorisierung von χ_f.) Was haben beide miteinander zu tun? Definition Hauptraum (er heißt manchmal auch verallgemeinerter Eigenraum). Wann ist V die direkte Summe der Haupträume von $f : V \to V$? Warum hat ein Homomorphismus $f : V \to W$ keine Eigenwerte?

§7 Diagonalisierbarkeit

Definition Diagonalisierbarkeit kennen. Satz kennen: A diagonalisierbar $\iff V$ besitzt eine Basis aus Eigenvektoren zu $A \iff V$ ist direkte Summe der Eigenräume von $A \iff \chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren, und geometrische = algebraische Vielfachheit für jeden Eigenwert von A.
In der Diagonalen stehen welche Zahlen? Wissen, dass **hinreichend** für Diagonalisierbarkeit ist, dass das charakteristische Polynom in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Notwendig und hinreichend, dass das Minimalpolynom zu A (was ist das?) in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Satz von Cayley-Hamilton kennen: $\chi_A(A) = 0$. (Damit folgt: Minimalpolynom hat dieselben Nullstellen wie char. Polynom, aber evtl. von geringerer Vielfachheit.)
Nilpotente Matrizen: Definition, Eigenwerte. Jordan-Normalform: Wie sieht sie aus? Wieviele Jordankästchen gibt es? Wie groß sind diese? Wann besitzt A Jordan-Normalform?

§7 Euklidische Vektorräume

Definition Bilinearform, Skalarprodukt, euklidischer Vektorraum. Beschreibung von Bilinearformen durch Matrizen, Basiswechsel (Warum geht er anders als bei $f : V \to V$?). Kriterien für positive Definitheit. Beispiele für Skalarprodukte. Warum bedeutet beim **gewöhnlichen** Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = 0$, dass x senkrecht zu y steht? Orthonormalbasen, Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren.
Orthogonale Abbildungen, Definition, äquivalente Kriterien, Eigenwerte. Machen Sie sich klar, dass bei dem gewöhnlichen Skalarprodukt eine orthogonale Abbildung Winkel und Längen erhält, so wie man es von Drehungen und Spiegelungen gewohnt ist. Und die Normalform für orthogonale Abbildungen (die Sie kennen sollten!) zeigt, dass orthogonale Abbildungen auch i.w. so beschrieben werden können.
Selbstadjungierte Abbildungen, Definition. Wie sehen die zugehörigen Matrizen aus, wie die zugehörigen Eigenwerte? Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen. Hauptachsentransformation: Verfahren, geometrische Bedeutung.

Geometrische Lineare Algebra

§1 Endomorphismen von Vektorräumen

Was sind Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume? Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Nullstellen mit Vielfachheiten von Polynomen.
Charakteristisches Polynom. Das charakteristische Polynom ist unabhängig von der Wahl der Basis. Zusammenhang Vielfachheit der Nullstellen des charakteristischen Polynoms und Dimension des Eigenraums. Teilbarkeit von Polynomen und der Satz von Caley-Hamilton.
Diagonalisierbare Endomorphismen und die Zerlegung in Eigenräume. Komplexe Zahlen.

§2 Bilinearformen

Bilineare Abbildungen, Strukturmatrix einer bilinearen Abbildung. Symmetrische und schiefsymmetrische (alternierende) Bilinearformen. Nicht-ausgeartete Bilinearformen.

§3 Quadratische Formen und symmetrische Bilinearformen

Orthogonale Basen. Quadratische Formen über $\mathbb{R}$, Sylvesters Trägheitssatz, Signatur und Trägheitsindex.
Positiv definite, positiv semidefinite, negativ definite, negativ semidefinite und indefinite quadratische Formen/Bilinearformen. Cauchy–Schwarzsche Ungleichung für positiv semidefinite Bilinearformen. Das Determinantenkriterium für positiv definite Matrizen/Bilinearformen.

§4 Geometrie im $\mathbb{R}^2$

Spat und Simplex und deren Volumen im Zusammenhang mit der Determinante (im $\mathbb{R}^n$).
Geometrie im $\mathbb{R}^2$: Drehung um $\pi/2$ und orthogonale Vektoren, Geraden (Hessesche Normalform, als Gleichung und in Parameterdarstellung), Strecken, Kreise, Winkel, Abstand eines Punktes von einer Geraden. Die orthogonale Gruppe, Spiegelungen und Drehungen und deren Matrizen.
Kongruenzbegriff, Kongruenzabbildungen, Kongruenzsätze. Evtl Satz vom Rechteck (ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn die Diagonalen gleiche Länge haben), Satz vom Rhombus (ein Parallelogramm ist genau dann ein Rhombus, wenn die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen)

§5 Geometrie in euklidischen Vektorräumen

Orthogonale und orthonormale Basen. Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren. Besitzt jeder euklidische VR eine orthonormale/orthogonale Basis? Orthogonales Komplement und orthogonale Summe.
Geraden und Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$ und deren Schnittpunkte. Hessesche Normalform und der Abstand zu einem Punkt.
Die orthogonale Gruppe, die spezielle orthogonale Gruppe und Bewegungen. Jede orthogonale Abbildung im $\mathbb{R}^n$ ist Produkt von höchstens n Spiegelungen. Orientierungserhaltende und orientierungsumkehrende Abbildungen, Zusammenhang mit dem Vorzeichen der Determinante.
Anwendungen auf den $\mathbb{R}^3$: jede spezielle orthogonale Abbildung ist eine Drehung.
Hauptachsentransformationen: zu jeder symmetrischen Matrix existiert eine orthogonale Basis, sodass die Strukturmatrix bezüglich dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

§6 Quadriken

Klassifikation der Quadriken im
$\mathbb{R}^2$: Ellipse, Hyperbel, Parabel.
$\mathbb{R}^3$: Ellipsoid, einschaliges und zweischaliges Hyperboloid, elliptisches und hyperbolisches Paraboloid, Kegel.
Beschreibung der Quadriken durch Gleichungen zweiten Grades. Normalform einer solchen Gleichung: mittels Hauptachsentranformationen gemischte quadratische Terme beseitigen, mittels quadratischer Ergänzung und Koordinatentransformation lineare Terme (bis auf höchstens einen beseitigen), schließlich mittels Verschiebung den konstanten Term beseitigen (falls noch ein linearer Term vorhanden ist).