Multitype Galton-Watson-Prozesse und verzweigende Markov-Ketten

Christian Bartsch, 17. Juli 2008

Zusammenfassung:
Eine naheliegende Verallgemeinerung von Galton-Watson-Verzweigungsprozessen besteht darin $k \in \mathbb{N}$ verschiedene Typen von Individuen einzuführen. Die dadurch erhaltene Markov-Kette $(Z_n)_{n\geq 0}$ heißt Multitype Galton-Watson-Prozess (MTGWP) und ist $\mathbb{N}_0^k$-wertig. Ihr unmittelbar zugeordnet ist die Matrix der Reproduktionsmittel M, bestehend aus den Einträgen $m_{ij} := E_{e_i}[Z_1^j]$, wobei $Z_1 = \left(Z_1^1, \ldots, Z_1^k\right)$ gilt und E_{e_i} der Erwartungswertoperator zu dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_{e_i} ist, unter dem $Z_0 = e_i$ gilt.
Wie wir sehen werden, sind alle Zustände ungleich Null transient und ferner gilt mit $P_{e_i}(Z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0) + P_{e_i}(Z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty) = 1$ dieselbe Dichotomie wie im eindimensionalen Fall. Mit Hilfe des Perron-Frobenius-Theorems für nicht negative Matrizen weiß man von der Existenz eines dominierenden Eigenwerts $\rho > 0$ von M. Dieser Eigenwert nimmt nun - wie wir sehen werden - dieselbe Rolle ein wie das Reproduktionsmittel im eindimensionalen Fall. Ferner gilt das Kesten-Stigum-Theorem zum Konvergenzverhalten von $\frac{1}{\rho^n} Z_n$ in vollständiger Analogie zum eindimensionalen Fall.
Außer den oben genannten Einsichten in die Theorie der MTGWP stellt der Vortrag auch noch Zusammenhänge zu so genannten verzweigenden Markov-Ketten vor. Bei einer verzweigenden Markov-Kette bewegen sich Teilchen (oder Individuen) im Zustandsraum einer (endlichen) Markov-Kette gemäß der gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten und reproduzieren sich außerdem gemäß Reproduktionsverteilungen, die vom jeweiligen Zustand abhängen können.