

UNIVERSITÀ DI PISA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
A. A. 2001/02

TESI DI LAUREA

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE
IN TEORIA DEL TRASPORTO
E APPLICAZIONI

CANDIDATO
Alessio Brancolini

RELATORE
Prof. Giuseppe Buttazzo

Indice

Indice	i
Introduzione	iii
1 Analisi in spazi metrici	1
1.1 Proprietà generali delle misure di Hausdorff	1
1.2 Distanza di Hausdorff e risultati correlati	6
2 Analisi convessa	13
2.1 Introduzione, trasformata di Fenchel	13
2.2 Sottodifferenziabilità	19
2.3 Relazioni di dualità	22
2.4 Studio di un caso particolare	29
3 Γ-convergenza	33
3.1 Definizioni preliminari	33
3.2 Definizione di Γ -convergenza	35
3.3 Convergenza dei minimi	38
4 Teoria generale del trasporto ottimale	41
4.1 Primi risultati	41
4.2 Regolarità della misura ottimale	45
4.3 Esistenza del trasporto nel caso unidimensionale	49
4.4 La densità di trasporto	52
5 Problemi di ottimizzazione di forma	55
5.1 Introduzione	55
5.2 Il caso scalare	57
5.2.1 L'equazione di Monge-Kantorovich	57

Indice

5.2.2	Il problema del trasporto ottimale	68
5.3	Generalizzazioni	71
5.3.1	Il caso scalare	71
5.3.2	Equivalenza con il problema del trasporto	72
5.3.3	Il caso vettoriale	73
6	Trasporto ottimale con regione di Dirichlet libera	77
6.1	Introduzione	77
6.2	Optimal location problems	78
6.2.1	Domini limitati	79
6.2.2	Suddivisioni dell'intero piano	82
6.2.3	Una congettura	84
6.3	Esistenza dell'insieme ottimale	85
6.4	Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale	88
6.4.1	Punti singolari	89
6.4.2	Proprietà topologiche	91
6.4.3	Distanza dal bordo	93
6.4.4	Stime asintotiche	97
7	Un modello di ottimizzazione urbana	101
7.1	Il problema dell'urban planning	101
7.2	Esistenza dell'insieme ottimale	102
	Appendici	109
A	Note sulla teoria della misura	109
A.1	Alcune tecniche di teoria della misura	109
B	Multifunzioni	113
B.1	Esistenza dell'estremo superiore essenziale di variabili aleatorie	113
B.2	Esistenza dell'estremo superiore essenziale di multifunzioni . .	117
	Bibliografia	121

Introduzione

Il problema del trasporto ottimale fu posto per la prima volta dal Gaspard Monge nel 1781 nella *Mémoire sur la Théorie des Déblais et des Remblais* pubblicata presso Histoire de l'Académie des Sciences de Paris. Date due distribuzioni di massa f^+ ed f^- su \mathbf{R}^N soddisfacenti alla condizione di bilancio delle masse

$$\int_{\mathbf{R}^N} f^+(x) \, dx = \int_{\mathbf{R}^N} f^-(x) \, dx$$

il problema proposto da Monge consiste nel trovare una mappa t (che chiamiamo *trasporto*) che porta la distribuzione f^+ nella f^- (ciò che equivale a dire

$$\int_{t^{-1}(B)} f^+(x) \, dx = \int_B f^-(y) \, dy$$

per ogni insieme di Borel B) e minimizza il costo del trasporto

$$\int_{\mathbf{R}^N} |x - t(x)| f^+(x) \, dx$$

Questo problema, data la forte non-linearità, è stato difficile da trattare per lungo tempo. Non è neppure detto che esista una mappa che trasformi la distribuzione di massa f^+ nella f^- . Monge stesso, ad esempio, era riuscito solo euristicamente a provare l'esistenza di un potenziale ottimale.

In seguito, Appell, ipotizzando l'esistenza di una mappa ottimale con sufficiente regolarità riuscì a provare quanto Monge aveva lasciato in sospeso.

La vera svolta nello studio dei problemi di trasporto ottimale si ebbe però soltanto nel 1940 grazie a Kantorovich che in due pubblicazioni, *On the transfer of masses* e *On a problem of Monge*, propose una generalizzazione del problema posto da Monge 161 anni prima. Kantorovich, invece di trasporti, considera *piani di trasporto*, cioè misure non negative μ definite sul prodotto $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ soddisfacenti le condizioni di ammissibilità

$$\mu(B \times \mathbf{R}^N) = \mu^+(B) = \int_B f^+(x) \, dx, \quad \mu(\mathbf{R}^N \times B) = \mu^-(B) = \int_B f^-(x) \, dx$$

Introduzione

Nella formulazione di Kantorovich il problema del trasporto diventa quello di minimizzare la quantità

$$\int_{\mathbf{R}^N} |x - y| \, d\mu$$

al variare della misura μ fra i piani di trasporto.

Il nuovo problema presenta molti vantaggi di cui quello originale è del tutto privo: la linearità rispetto alla struttura di spazio vettoriale su $\mathcal{M}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$, ad esempio. Inoltre il nuovo funzionale è definito su un sottoinsieme convesso non vuoto e compatto per la topologia debole* di $\mathcal{M}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ e, essendo semicontinuo inferiormente per tale topologia, l'esistenza del minimo è assicurata.

La nuova formulazione racchiude quella originale. Basta osservare che se la mappa t è un trasporto, allora la misura definita da

$$\mu_t(B) = \mu^+(\{x \in \mathbf{R}^N : (x, t(x)) \in B\})$$

è un piano di trasporto e vale la relazione

$$\int_{\mathbf{R}^N} |x - t(x)| f^+(x) \, dx = \int_{\mathbf{R}^N} |x - y| \, d\mu_t$$

Ciò significa che nella formulazione di Kantorovich l'estremo inferiore è effettuato su una classe più vasta di quella del problema di Monge (e quindi può essere strettamente più piccolo).

Nel lavoro di Kantorovich rimase aperta la questione se, data una misura soluzione del problema rilassato, questa è una soluzione del problema posto da Monge, cioè è indotta da un trasporto. In [24], Sudakov diede una risposta affermativa. L'idea di Sudakov è quella di risolvere il problema dell'esistenza del trasporto ottimale nel caso unidimensionale, decomporre lo spazio in raggi di trasporto e infine incollare le soluzioni per ogni raggio costruendo il trasporto cercato.

Osserviamo che tutto può essere generalizzato sostituendo alle misure $f^+ \, dx$ e $f^- \, dx$ due generiche misure boreliane positive μ^+ e μ^- su due spazi metrici X e Y qualsiasi e considerando un costo generico $c(x, y)$ invece della distanza euclidea. In tal caso i trasporti saranno le mappe boreliane $t : X \rightarrow Y$ tali che $\mu^-(B) = \mu^+(t^{-1}(B))$ per ogni boreliano B , mentre i piani di trasporto saranno le misure positive definite sul prodotto $X \times Y$ tali che $\mu(B \times Y) = \mu^+(B)$ e $\mu(X \times B) = \mu^-(B)$.

Negli ultimi anni lo studio dei problemi di trasporto ha raggiunto un enorme interesse grazie al fatto che questo si è rivelato intimamente collegato a problemi di varia natura. Ad esempio, Bouchitté e Buttazzo in [6] mettono in relazione le soluzioni il problema di ottimizzazione di forma che consiste nel massimizzare al variare di μ la quantità $\mathcal{E}(\mu)$ data da

$$\mathcal{E}(\mu) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \, d\mu - \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) \right\}$$

con quelle del problema di Monge-Kantorovich associato che è quello con il costo dato dalla distanza euclidea.

Fra le altre applicazioni della teoria del trasporto ottimale che possiamo citare vi è quella ai problemi di fluidodinamica trovata da Brenier, ma si sono trovati collegamenti anche legati all'equazione dei mezzi porosi, all'equazione di Monge-Ampere, all'oceanografia e all'elaborazione di immagini. Un elenco degli sviluppi in questa direzione si può trovare in [15]. Per un resoconto di altri (come ad esempio quelle relative al calcolo delle probabilità) si può consultare la prefazione dei libri di Rachev e Rüschendorf [22] e [23].

Questo lavoro di tesi è essenzialmente diviso in due parti. Nei primi tre capitoli ricordiamo brevemente alcuni risultati di teoria della misura, analisi convessa e Γ -convergenza. Nei successivi ci occupiamo della teoria del trasporto ottimale e delle applicazioni.

Nel *primo capitolo* introduciamo la nozione di misura di Hausdorff \mathcal{H}^k su un generico spazio metrico X e studiamo alcune delle proprietà elementari. Lo scopo è di rendere \mathcal{C}_X , la classe dei sottoinsiemi chiusi non vuoti di X , uno spazio metrico rispetto a una certa metrica (la metrica di Hausdorff) e studiare il comportamento della misura \mathcal{H}^1 rispetto a questa convergenza. Lo strumento essenziale che giungiamo a dimostrare è il teorema di Gołab che afferma che la classe dei chiusi connessi è un sottoinsieme chiuso di \mathcal{C}_X sul quale \mathcal{H}^1 è sequenzialmente semicontinua inferiormente.

Il *secondo capitolo* vuole essere una breve introduzione alla Analisi Convessa. Qui introduciamo il concetto di problema duale e studiamo il legame con il problema primario.

Nel *terzo capitolo* definiamo la Γ -convergenza, enunciamo una formulazione equivalente e dimostriamo che data una successione di funzionali $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Introduzione

e una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente tale che x_n è un minimo di f_n , allora $x = \lim x_n$ è un minimo del Γ -limite della successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Nel *quarto capitolo* cominciamo lo studio del problema del trasporto ottimale. Qui dimostriamo l'esistenza del piano di trasporto ottimale e studiamo le proprietà di ciclica monotonia rispetto al costo c del supporto delle misure ottimali e alcuni risultati correlati (ricordiamo che un sottoinsieme Γ di $X \times X$ è detto c -ciclicamente monotono se

$$\sum_{i=1}^n c(x_{i+1}, y_i) \geq \sum_{i=1}^n c(x_i, y_i)$$

per ogni $n \geq 2$ e $(x_i, y_i) \in \Gamma$ con $i = 1, \dots, n$). Fra i risultati che otteniamo anche quella del potenziale di Kantorovich massimale. Infine dimostriamo l'esistenza di un trasporto nel caso unidimensionale e ricordiamo alcuni recenti risultati concernenti la densità di trasporto.

Nel *quinto capitolo* studiamo il problema di ottimizzazione di forma che consiste nel massimizzare al variare di μ la quantità $\mathcal{E}(\mu)$ data da

$$\mathcal{E}(\mu) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \, d\mu - \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) \right\}$$

Dimostriamo come dalla soluzione del problema di shape optimization si può ricavare una soluzione dell'equazione di Monge-Kantorovich

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla_\mu w) = f \\ |\nabla_\mu w| = 1 \quad \mu\text{-quasi-ovunque} \\ w \in \operatorname{Lip}_1(\mathbf{R}^N) \end{cases}$$

e viceversa. Inoltre si studia l'equivalenza con il problema del trasporto ottimale

$$\inf \int_{\mathbf{R}^N} |x - y| \, d\mu$$

dove l'estremo inferiore è fatto sulle misure i cui marginali sono f^+ e f^- , dimostrata da Bouchitté e Buttazzo in [6]. Infine, indichiamo i risultati che si ottengono generalizzando.

Nel *sesto capitolo* studiamo i problemi di *optimal location* e di *irrigation*. Nel primo problema il parametro libero è un chiuso Σ di cardinalità al più un intero n fissato e il problema è minimizzare la distanza media da Σ

$$\int_{\bar{\Omega}} d_\Omega(x, \Sigma) \, dx$$

dove Ω è un aperto fissato. Questo problema schematizza il modo di posizionare un dato numero di luoghi di produzione in una regione Ω per minimizzare il costo di trasporto del bene prodotto alla popolazione. Nel secondo caso il parametro libero è un chiuso Σ connesso di lunghezza al più un reale positivo l fissato e il problema è minimizzare la quantità

$$\int_{\bar{\Omega}} d_{\Omega}(x, \Sigma) \, dx$$

Entrambi questi problemi sono visti come casi particolari del problema di minimizzare

$$\inf_{\mu \in \mathcal{A}} \int_{\bar{\Omega}} d_{\Omega, \Sigma}(x, y) \, d\mu$$

al variare di Σ nella classe dei chiusi di $\bar{\Omega}$ con un numero di componenti connesse e una lunghezza prefissata. Il costo $d_{\Omega, \Sigma}$ è una semi-distanza che tiene conto della geometria di Ω e della presenza della *regione di Dirichlet* Σ e attribuisce un costo nullo al trasporto effettuato su Σ .

Il *settimo capitolo* è dedicato alla dimostrazione di due risultati di esistenza originali. L'argomento studiato sono i problemi di *urban planning*. Anziché la distanza $d_{\Omega, \Sigma}$ del sesto capitolo, consideriamo una distanza d_{Σ} che assegna al trasporto effettuato su Σ un costo non nullo. Dimostriamo l'esistenza dell'insieme ottimale Σ per il problema di minimizzazione della quantità

$$\inf_{\mu \in \mathcal{A}} \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} d_{\Sigma}(x, y) \, d\mu$$

al variare di Σ nella classe dei chiusi connessi di $\bar{\Omega}$ di lunghezza inferiore a un prefissato reale positivo l nel caso di costi del tipo

$$d_{\Sigma}(x, y) := \inf \{ \Phi(\mathcal{H}^1(\gamma(I) \setminus \Sigma)) + \Psi(\mathcal{H}^1(\gamma(I) \cap \Sigma)) : \gamma \in \text{Lip}(I, \Omega), \\ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \}$$

quando $\Psi(t) = t$, $\Psi(t) = \alpha I_{]0, \infty[}(t)$, $\alpha > 0$ e $\Psi(t) = \alpha t$, $\Psi(t) = \beta t$, $\alpha > \beta > 0$. Per dimostrare il secondo risultato si usa una versione più generale del teorema di Golab.

Capitolo 1

Analisi in spazi metrici

In questo capitolo introduciamo alcuni importanti e utili risultati sulle misure di Hausdorff \mathcal{H}^k e sulla convergenza di Hausdorff. Per un'analisi più approfondita si veda [3], i primi due capitoli di [2] e [19]. In tutto il capitolo X indicherà uno spazio metrico munito di distanza d .

1.1 Proprietà generali delle misure di Hausdorff

Definiamo, per $k \in [0, +\infty[$,

$$\omega_k := \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{k}{2})} \quad (1.1)$$

dove $\Gamma(t) := \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$.

Osservazione 1.1. Ricordiamo che, se k è intero, ω_k è il “volume” della sfera k -dimensionale. Infatti, da una parte, abbiamo

$$\begin{aligned} \omega_k &= \iint_{|x| \leq 1} 1 \, dx = \iint_{\rho \leq 1} \rho^{k-1} (\sin \theta_1)^{k-2} \cdots (\sin \theta_{k-2}) \, d\rho \, d\theta_1 \cdots d\theta_{k-1} = \\ &= \frac{1}{k} \iint (\sin \theta_1)^{k-2} \cdots (\sin \theta_{k-2}) \, d\theta_1 \cdots d\theta_{k-1} \end{aligned}$$

Dall'altra

$$\int_{\mathbf{R}^k} e^{-|x|^2} \, dx = \int e^{-\rho^2} \rho^{k-1} (\sin \theta_1)^{k-2} \cdots (\sin \theta_{k-2}) \, d\rho \, d\theta_1 \cdots d\theta_{k-1} =$$

1.1. Proprietà generali delle misure di Hausdorff

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \iint (\sin \theta_1)^{k-2} \cdots (\sin \theta_{k-2}) \, d\theta_1 \cdots d\theta_{k-1}$$

$$\int_{\mathbf{R}^k} e^{-|x|^2} \, dx = \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-x_1^2} \, dx_1 \right) \cdots \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-x_k^2} \, dx_k \right) = \pi^{\frac{k}{2}}$$

Segue quindi la (1.1)

$$\pi^{\frac{k}{2}} = \frac{k}{2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \omega_n = \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \omega_k$$

Definizione 1.2 (Misure di Hausdorff). Sia $\delta \in]0, +\infty]$ e $A \subseteq X$. Poniamo

$$\mathcal{H}_\delta^k(A) := \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } A_i)^k : \text{diam } A_i < \delta, A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\} \quad (1.2)$$

Notando che $\mathcal{H}_\delta^k(A)$ è decrescente, definiamo

$$\mathcal{H}^k(A) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^k(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^k(A) \quad (1.3)$$

Osservazione 1.3. Poiché per ogni insieme A_i si ha $\text{diam } A_i = \text{diam } \overline{A}_i$, nella (1.2) si può considerare ricoprimenti di A costituiti da chiusi soltanto.

I seguenti due risultati stabiliscono che $\mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{B}(X)$ è una misura di Borel regolare.

Teorema 1.4. \mathcal{H}^k e \mathcal{H}_δ^k per ogni numero reale $k \geq 0$ e per ogni $\delta \in]0, +\infty]$ sono misure esterne. Inoltre i boreliani di X sono \mathcal{H}^k -misurabili.

Dimostrazione. Vediamo per prima cosa che \mathcal{H}_δ^k è una misura esterna. Subito si trova che $\mathcal{H}_\delta^k(\emptyset) = 0$. Ora mostriamo che è subadditiva. Sia $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ supponiamo che gli insiemi $\{A_{ij}\}_{j \in \mathbb{N}}$ siano un ricoprimento di A_i con la proprietà

$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{diam } A_{ij})^k - \mathcal{H}_\delta^k(A_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(A) &\leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} (\text{diam } A_{ij})^k \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{j \in \mathbb{N}} (\text{diam } A_{ij})^k \leq \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \mathcal{H}_\delta^k(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right\} \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^k(A_i) + \varepsilon \end{aligned}$$

1.1. Proprietà generali delle misure di Hausdorff

\mathcal{H}_δ^k è quindi anche subadditiva. Che \mathcal{H}^k sia una misura esterna è immediato osservando che l'estremo superiore di misure esterne è una misura esterna.

Per dimostrare che i boreliani sono \mathcal{H}^k -misurabili si usa il teorema A.9. Siano A e B insiemi distanti e sia $\delta < d(A, B)/2$. Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono ricoprimenti di A e B rispettivamente con $\text{diam } A_n < \delta$ e $\text{diam } B_n < \delta$, allora $A_n \cap B_m = \emptyset$ e $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di $A \cup B$. Viceversa se $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di $A \cup B$ con $\text{diam } C_n < \delta$, allora $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dove $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono ricoprimenti di A e B rispettivamente con $\text{diam } A_n < \delta$, $\text{diam } B_n < \delta$ e $A_n \cap B_m = \emptyset$. Da tutto ciò segue che

$$\mathcal{H}_\delta^k(A \cup B) = \mathcal{H}_\delta^k(A) + \mathcal{H}_\delta^k(B)$$

Passando al limite per $\delta \rightarrow 0^+$ si trova che \mathcal{H}^k è additiva sui distanti e quindi, per il teorema A.9 i boreliani sono \mathcal{H}^k -misurabili. \square

Osservazione 1.5. Questo semplice fatto ci permetterà di definire la *dimensione di Hausdorff* di un insieme. Abbiamo, se $k > k' \geq 0$

$$\mathcal{H}^k(A) > 0 \implies \mathcal{H}^{k'}(A) = \infty$$

Ciò segue osservando che

$$\mathcal{H}_\delta^k(A) \leq \delta^{k-k'} \mathcal{H}_\delta^{k'}(A)$$

e, tenuto conto che $k - k' > 0$, passando al limite per $\delta \rightarrow 0^+$. La dimensione di Hausdorff allora è definita come

$$\mathcal{H}\text{-dim}(A) := \inf\{k \geq 0 : \mathcal{H}^k(A) = 0\}$$

Facciamo notare che se $k < \mathcal{H}\text{-dim}(A)$, allora $\mathcal{H}^k(A) = +\infty$; se invece $k > \mathcal{H}\text{-dim}(A)$, allora $\mathcal{H}^k(A) = 0$.

Teorema 1.6 (Regolarità delle misure di Borel). *Le misure di Hausdorff \mathcal{H}^k sono di Borel regolari, cioè per ogni insieme A esiste un boreliano B tale che $A \subseteq B$ e $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{H}^k(A) = \infty$ la tesi è ovvia. Supponiamo allora $\mathcal{H}^k(A) < \infty$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ scegliamo una successione di chiusi $\{A_{ij}\}_{i \in \mathbb{N}}$ in tali che $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{ij}$, $\text{diam } A_{ij} < 1/j$ e

$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } A_{ij})^k \leq \frac{1}{j} + \mathcal{H}_{1/j}^k(A)$$

1.1. Proprietà generali delle misure di Hausdorff

Poniamo $B := \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{ij}$. B è un boreliano, $A \subseteq B$ e

$$\mathcal{H}_{1/j}^k(B) \leq \mathcal{H}_{1/j}^k(C_j) \leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } A_{ij})^k \leq \frac{1}{j} + \mathcal{H}_{1/j}^k(A) \quad \square$$

Lemma 1.7. *Supponiamo che X e Y siano spazi metrici con le distanze d_X e d_Y rispettivamente. Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ una funzione M -lipschitziana. Allora*

$$\mathcal{H}^k(\varphi(A)) \leq M^k \mathcal{H}^k(A)$$

per ogni sottoinsieme A di X .

Dimostrazione. Supponiamo, senza perdere di generalità, che φ sia suriettiva. Siano $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ fissati e sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento numerabile di A tale che $\text{diam } A_n \leq \delta$ e

$$\frac{\omega_k}{2^k} \sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{diam } A_n)^k \leq \mathcal{H}_\delta^k(A) + \varepsilon$$

Poiché per ogni sottoinsieme A si ha

$$\text{diam } \varphi(A) \leq M \text{diam } A$$

si trova che

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{M\delta}^k(\varphi(A)) &\leq \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{diam } \varphi(A_n))^k \leq \\ &\leq M^k \frac{\omega_k}{2^k} \sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{diam } A_n)^k \leq M^k \mathcal{H}_\delta^k(A) + \varepsilon \end{aligned} \quad (1.4)$$

Passando al limite per $\delta \rightarrow 0^+$ nel primo e nell'ultimo membro, si trova che

$$\mathcal{H}^k(\varphi(A)) \leq M^k \mathcal{H}^k(A) + \varepsilon \quad (1.5)$$

La tesi segue allora dalla (1.5) per l'arbitrarietà di ε . \square

Dal lemma appena dimostrato segue questo semplice, ma utile corollario.

Corollario 1.8. *Sia C un sottoinsieme connesso non vuoto di uno spazio metrico X . Si ha allora*

$$\mathcal{H}^1(C) \geq \text{diam } C$$

In particolare, un sottoinsieme connesso non vuoto di misura 1-dimensionale nulla è costituito da un solo punto.

1.1. Proprietà generali delle misure di Hausdorff

Dimostrazione. Sia x_0 un punto arbitrario di C . La funzione $\varphi(x) = d(x, x_0)$ è 1-lipschitziana. Per il lemma 1.7 abbiamo dunque

$$\mathcal{H}^1(\varphi(C)) \leq \mathcal{H}^1(C)$$

Siccome è immagine di un insieme connesso tramite una funzione continua, $\varphi(C)$ è un sottoinsieme connesso di \mathbf{R} , cioè un intervallo. Abbiamo allora

$$\text{diam } \varphi(C) = \sup_{x,y \in C} |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \sup_{x,y \in C} d(x, y) = \text{diam } C$$

Ricordando che

$$\text{diam } \varphi(C) = \mathcal{L}^1(\varphi(C)) = \mathcal{H}^1(\varphi(C))$$

la prima affermazione è dimostrata. La seconda è un'ovvia conseguenza della prima in quanto il diametro di un sottoinsieme connesso con almeno due punti è positivo. \square

Definizione 1.9 (Densità sferiche). Data una misura μ su uno spazio metrico X , un reale $k \geq 0$, $x \in X$ definiamo

$$\bar{\Theta}_k(\mu, x) := \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k}, \quad \underline{\Theta}_k(\mu, x) := \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k}$$

sono rispettivamente le *k-densità superiore* e *inferiore* di μ nel punto x . Definiamo inoltre per ogni sottoinsieme B di X

$$\bar{\Theta}_k(B, x) := \bar{\Theta}_k(\mathcal{H}^k \llcorner B, x), \quad \underline{\Theta}_k(B, x) := \underline{\Theta}_k(\mathcal{H}^k \llcorner B, x)$$

Se $\underline{\Theta}_k(\mu, x) = \bar{\Theta}_k(\mu, x)$, indichiamo con $\Theta_k(\mu, x)$ il loro comune valore. Analogamente per $\bar{\Theta}_k(B, x)$ e $\underline{\Theta}_k(B, x)$.

Osservazione 1.10. Per definizione abbiamo

$$\bar{\Theta}_k(B, x) = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^k(B \cap B_r(x))}{\omega_k r^k}$$

$$\underline{\Theta}_k(B, x) = \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^k(B \cap B_r(x))}{\omega_k r^k}$$

Il seguente teorema è un punto fondamentale nella dimostrazione del teorema di Gołab. La dimostrazione, essenzialmente basata sul ben noto lemma di Vitali, si può trovare in [3].

Teorema 1.11. *Supponiamo che μ sia una misura positiva, localmente finita. Siano dati anche un reale t positivo e un boreliano B . Allora*

$$\bar{\Theta}_k(\mu, x) \geq t \text{ per ogni } x \in B \implies \mu(B) \geq t \mathcal{H}^k(B)$$

$$\underline{\Theta}_k(\mu, x) \geq t \text{ per ogni } x \in B \implies \mu(B) \leq t \mathcal{H}^k(B)$$

1.2. Distanza di Hausdorff e risultati correlati

1.2 Distanza di Hausdorff e risultati correlati

Per ogni sottoinsieme S di X e $\varepsilon > 0$ poniamo

$$S_\varepsilon := \{x \in X : d(x, S) < \varepsilon\}$$

Denotiamo con \mathcal{C}_X la classe dei sottoinsiemi chiusi non vuoti di uno spazio metrico X .

Definizione 1.12 (Distanza di Hausdorff). Siano F e G chiusi non vuoti in X . Definiamo

$$d_H(F, G) := \min\{h(F, G), 1\}$$

dove

$$h(F, G) := \inf\{r \in [0, +\infty[: F \subseteq G_r \text{ e } G \subseteq F_r\}$$

d_H è detta *distanza di Hausdorff*.

Osserviamo che si può avere $h(F, G) = \infty$. Questo avviene ad esempio se F è limitato e G è illimitato.

La funzione d_H è effettivamente una distanza e \mathcal{C}_X munito della distanza di Hausdorff diventa uno spazio metrico. Inoltre se (X, d) è completo, anche (\mathcal{C}_X, d_H) è completo. Questo è il contenuto dei seguenti due enunciati.

Proposizione 1.13. (\mathcal{C}_X, d_H) è uno spazio metrico.

Dimostrazione. Dobbiamo solo verificare che d_H è una distanza.

È immediato constatare che, se F è un chiuso non vuoto, $d_H(F, F) = 0$. Viceversa se $d_H(F, G) = 0$, si ha per ogni $\varepsilon > 0$

$$F \subseteq G_\varepsilon, \quad G \subseteq F_\varepsilon$$

quindi

$$F \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} G_\varepsilon = G, \quad G \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon = F$$

Le due uguaglianze precedenti seguono dal fatto che F e G sono chiusi. Da ciò infine si ha $F = G$.

Chiaramente $d_H(F, G) = d_H(G, F)$ per ogni coppia F, G di chiusi.

1.2. Distanza di Hausdorff e risultati correlati

Siano dati F, G, H chiusi non vuoti. Dimostriamo per prima cosa che

$$h(F, H) \leq h(F, G) + h(G, H) \quad (1.6)$$

Fissato $\varepsilon > 0$, siano r e s reali tali che $0 \leq r - h(F, G) \leq \varepsilon$ e $0 \leq s - h(G, H) \leq \varepsilon$. Allora, per definizione,

$$F \subseteq G_r, \quad G \subseteq F_r, \quad G \subseteq H_s, \quad H \subseteq G_s$$

da cui

$$F \subseteq H_{r+s}, \quad H \subseteq F_{r+s}$$

Quindi abbiamo

$$h(F, H) \leq r + s \leq h(F, G) + h(G, H) + 2\varepsilon$$

Al variare di ε si ottiene la (1.6).

Dimostriamo infine che

$$d_H(F, H) \leq d_H(F, G) + d_H(G, H) \quad (1.7)$$

Supponiamo $d_H(F, H) < 1$. Se almeno uno fra $d_H(F, G)$ o $d_H(G, H)$ è almeno 1, la (1.7) è vera. Se entrambi sono minori di 1, allora d_H coincide con h e la (1.7) non è altro che la (1.6). Supponiamo invece che $d_H(F, H) = 1$. Per definizione $h(F, H) \geq 1$. Dobbiamo verificare che $1 \leq d_H(F, G) + d_H(G, H)$. Se per assurdo fosse $1 > d_H(F, G) + d_H(G, H)$, si potrebbero trovare r e s tali che

$$h(F, H) \leq h(F, G) + h(G, H) \leq r + s < 1$$

che è assurdo perché $h(F, H) \geq 1$. □

In seguito per indicare che $d_H(F_n, F) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ scriveremo

$$\mathcal{H}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F \quad \text{oppure} \quad F_n \xrightarrow{\mathcal{H}} F$$

Proposizione 1.14. *Se (X, d) è completo, anche (\mathcal{C}_X, d_H) è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy per d_H . Supponiamo che, a meno di un numero finito di termini, $d_H(C_n, C_m) < 1$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}$. Poiché la successione $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, possiamo trovare $\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ crescente tale che

$$h(C_n, C_m) = d_H(C_n, C_m) < \frac{1}{2^k} \quad \text{per ogni } m, n \geq N_k$$

1.2. Distanza di Hausdorff e risultati correlati

Definiamo

$$D_k := \overline{\bigcup_{j \geq k} C_{N_j}}, \quad C := \bigcap_{k \geq 0} D_k$$

C è chiuso e non vuoto. La prima proprietà segue dal fatto di essere intersezione di chiusi. Per dimostrare la seconda si scelga $x_1 \in C_{N_1}$ e, supponendo che x_k sia già stato scelto in C_{N_k} , poiché $C_{N_k} \subseteq (C_{N_{k+1}})_{1/2^k}$ si prenda $x_{k+1} \in C_{N_{k+1}}$ in modo che $d(x_k, x_{k+1}) \leq 1/2^k$. La successione $\{x_k\}_{k \geq 1}$ è di Cauchy, quindi esiste $x \in X$ tale $x_k \rightarrow x$. Poiché $x_h \in D_k$ per $h \geq k$, si ottiene che $x \in D_k$ per ogni $k \geq 1$ e C è dunque non vuoto. Abbiamo allora

$$C \subseteq D_k \subseteq \overline{(C_{N_k})_{1/2^k}} \subseteq (C_{N_k})_{1/2^{k-1}}$$

Inoltre per $h \geq k$

$$C_{N_k} \subseteq (C_{N_h})_{1/2^k} \subseteq (D_j)_{1/2^k}$$

da cui $C_{N_k} \subseteq C_{1/2^{k-1}}$. Ciò implica che

$$d_H(C_{N_k}, C) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \text{ per ogni } k \geq 1$$

e che

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} d_H(C_n, C) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d_H(C_n, C_{N_k}) + \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} d_H(C_{N_k}, C) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Da ciò segue la tesi. \square

Teorema 1.15 (Blaschke). *Se X è compatto, allora (\mathcal{C}_X, d_H) è uno spazio metrico compatto.*

Dimostrazione. Ricordiamo che in generale uno spazio metrico è compatto se e soltanto se è completo e totalmente limitato. Per le ipotesi dunque X è completo e totalmente limitato e basterà mostrare che \mathcal{C}_X è completo e totalmente limitato. La completezza di \mathcal{C}_X è a questo punto immediata e segue dalla proposizione 1.14. Per vedere l'ultima proprietà, fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia N un sottoinsieme finito di X tale che $d(x, N) < \varepsilon$ per ogni $x \in X$. Sia \mathcal{N} l'insieme delle parti non vuote di N . \mathcal{N} è un sottoinsieme finito e per ogni chiuso F si ha $d_H(F, \mathcal{N}) < \varepsilon$. \square

La dimostrazione dei due seguenti teoremi si può trovare in [3]. Entrambi sono indispensabili per dimostrare il teorema di Gołab.

1.2. Distanza di Hausdorff e risultati correlati

Teorema 1.16 (Primo teorema di rettificabilità). *Se X è uno spazio metrico completo e C è un sottoinsieme chiuso e connesso di X tale che $\mathcal{H}^1(C) < \infty$, allora C è compatto e connesso da curve iniettive e rettificabili.*

Teorema 1.17 (Secondo teorema di rettificabilità). *Sia C un sottoinsieme di X chiuso, connesso e di lunghezza finita. Allora esiste una famiglia numerabile $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di curve lipschitziane tali che*

$$\mathcal{H}^1(C \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n) = 0$$

Definizione 1.18 (Insiemi \mathcal{H}^k -rettificabili). Sia B un sottoinsieme \mathcal{H}^k -misurabile di \mathbf{R}^N . Diciamo che B è *numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile* se esiste una famiglia numerabile $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni lipschitziane $\mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^N$ tali che

$$\mathcal{H}^k(B \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\mathbf{R}^k)) = 0$$

Inoltre diciamo che un sottoinsieme B di \mathbf{R}^N è *\mathcal{H}^k -rettificabile* se $\mathcal{H}^k(B) < \infty$ e B è numerabilmente \mathcal{H}^k -rettificabile.

Osservazione 1.19. Un sottoinsieme chiuso, connesso e di lunghezza finita di uno spazio metrico è \mathcal{H}^1 -rettificabile. Ciò non è altro che una riformulazione del secondo teorema di rettificabilità (teorema 1.17) in termini della definizione 1.18.

Lemma 1.20. *Sia C un sottoinsieme connesso di X . Se $r > 0$ è tale che $r < (\text{diam } C)/2$, allora $\mathcal{H}^1(C \cap B_r(x)) \geq r$ per ogni $x \in C$.*

Dimostrazione. La funzione $\varphi(y) := d(x, y)$ è 1-lipschitziana, quindi

$$\mathcal{H}^1(\varphi(C \cap B_r(x))) \leq \mathcal{H}^1(C \cap B_r(x))$$

$\varphi(C \cap B_r(x))$ è un sottoinsieme connesso di \mathbf{R} contenuto in $[0, r]$. Infatti se $a < b \leq r$ e $a, b \in \varphi(C \cap B_r(x))$, l'immagine di $\varphi|_C$ contiene l'intervallo $[a, b]$ in quanto C è connesso. Inoltre, se $c \in]a, b[$ e $\varphi(y) = c$, si ha $d(x, y) = c < r$. Da ciò $y \in B(x, r)$ e $[a, b] \subseteq \varphi(C \cap B_r(x))$. Se, per assurdo, $\mathcal{H}^1(C \cap B_r(x)) < r$, a maggior ragione $\varphi(\mathcal{H}^1(C \cap B_r(x))) < r$, quindi $C \cap B_r(x) \subseteq B_{r_1}$ con $r_1 < r$. D'altra parte, poiché $2r < \text{diam } C$, deve esistere $y \in C$ tale che $d(x, y) > r$. Gli aperti $C \cap B(x, r_1)$ e $C \cap X \setminus (\overline{B}_r(x))$ sono non vuoti, disgiunti e sconnettono C . \square

1.2. Distanza di Hausdorff e risultati correlati

Questo è il principale risultato di tutta la sezione.

Teorema 1.21 (Gołab). *Sia X uno spazio metrico compatto. La classe dei chiusi connessi è un sottoinsieme chiuso di \mathcal{C}_X per la topologia indotta dalla distanza di Hausdorff e la misura \mathcal{H}^1 è sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto la convergenza di Hausdorff su questa classe. In altre parole, se $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di chiusi connessi e $C_n \xrightarrow{\mathcal{H}} C$, allora C è connesso e*

$$\mathcal{H}^1(C) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(C_n) \quad (1.9)$$

Dimostrazione. Vediamo per prima cosa che C è connesso. Se fosse unione di due chiusi disgiunti F_1 e F_2 prendiamo $0 < \varepsilon < d(F_1, F_2)/4$. Allora per $n \geq N$ si avrà $C_n \subseteq C_\varepsilon$. Poiché $(F_1)_\varepsilon \cap (F_2)_\varepsilon = \emptyset$, si deve avere (ad esempio) $C_N \subseteq (F_1)_\varepsilon$. Quindi $C \subseteq (C_N)_\varepsilon \subseteq (F_1)_{2\varepsilon}$. Assurdo perché $(F_1)_{2\varepsilon} \cap F_2 = \emptyset$.

Infine dimostriamo la (1.9). Possiamo supporre, estraendo una successione convergente al limite inferiore, che $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(C_n)$ esista e $\mathcal{H}^1(C_n) < L + 1$. Posto $d_n = \text{diam } C_n$, ancora a meno di sottosuccessioni, possiamo supporre che $d_n \rightarrow d > 0$. Definiamo

$$\mu_n(B) := \mathcal{H}^1(B \cap C_n)$$

per ogni boreliano B . μ_n è una misura di Borel regolare e, poiché le masse sono tutte minori di L , possiamo supporre che $\mu_n \rightharpoonup^* \mu$. Se $x \in C$ e $r' < r < (\text{diam } C)/2$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mu(B_r(x)) &\geq \mu(\overline{B_{r'}(x)}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\overline{B_{r'}(x)}) = \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(C_n \cap \overline{B_{r'}(x)}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

grazie al lemma 1.20. Per l'arbitrarietà di r' , si trova $\mu(B_r(x)) \geq r$ per ogni $x \in C$ e per ogni $r < (\text{diam } C)/2$. Per il teorema 1.11

$$\mathcal{H}^1(C) \leq 2\mu(X) \leq 2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X) = 2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(C_n) = 2L$$

Per il teorema 1.11

$$\mathcal{H}^1(C) \leq 2\mu(X) \leq 2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X) = 2 \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(C_n) = 2L$$

Per il teorema 1.17 per \mathcal{H}^1 -quasi-ogni $x_0 \in C$ esiste una curva lipschitziana γ a valori in C tale che $x_0 = \gamma(t_0)$ e $t_0 \in]0, 1[$. Possiamo inoltre supporre che

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\gamma(t_0 + h), \gamma(t_0 - h))}{2|h|} = 1$$

1.2. Distanza di Hausdorff e risultati correlati

A questo punto scegliamo arbitrariamente $\sigma \in]0, 1[$. Se h è piccolo, abbiamo

$$d(\gamma(t_0 + h), \gamma(t_0 - h)) \geq (2 - \sigma)|h|$$

e

$$(1 - \sigma)|h| \leq d(\gamma(t_0 \pm h), \gamma(t_0)) \leq (1 + \sigma)|h|$$

Supponiamo inoltre che $|h| < \sigma/(1 + \sigma)$ e poniamo $y := \gamma(t_0 - h)$, $z := \gamma(t_0 + h)$, $r := \max\{d(y, x_0), d(z, x_0)\}$. Otteniamo

$$r < (1 + \sigma)|h| < \sigma$$

$$d(y, z) \geq (2 - \sigma)|h| \geq \frac{2 - \sigma}{2 + \sigma}r$$

Sia $r' := (1 + \sigma)r$. Poiché $C_n \xrightarrow{\mathcal{H}} C$ esistono due successioni $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $y_n, z_n \in C_n$, $y_n \rightarrow y$ e $z_n \rightarrow z$. Allora definitivamente $y_n, z_n \in B_{r'}(x_0)$ e abbiamo

$$\mu_n(\overline{B_{r'}(x)}) = \mathcal{H}^1(C_n \cap \overline{B_{r'}(x)}) \geq d(z, y_n)$$

Passando al limite

$$\begin{aligned} \mu(\overline{B_{r'}(x)}) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(C_n \cap \overline{B_{r'}(x)}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(z, y_n) = \\ &= d(z, y) \geq \frac{2 - \sigma}{2 + \sigma}r = \frac{2 - \sigma}{(1 + \sigma)^2}r' \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di σ , $\overline{\Theta}_1(\mu, x_0) \geq 1$ vale per \mathcal{H}^1 -quasi-ogni $x_0 \in C$. Quindi

$$\mathcal{H}^1(C) \leq \mu(X) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X) = L = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(C_n) \quad \square$$

Capitolo 2

Analisi convessa

In questo capitolo vogliamo introdurre brevemente ad alcuni risultati di Analisi Convessa che ci saranno utili nel capitolo 5. Per una trattazione più approfondita rimandiamo a [14] e a [12].

Notazione. V indicherà uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e separabile su campo \mathbf{R} . Il duale topologico di V , cioè lo spazio dei funzionali lineari e continui su V sarà indicato con V^* . Dato un elemento v di V e un funzionale lineare e continuo v^* di V^* indicheremo con $\langle v^*, v \rangle$ il valore che il funzionale v^* assume su v .

V sarà anche munito della topologia $\sigma(V, V^*)$, detta *topologia debole*. La topologia $\sigma(V, V^*)$ è la più debole topologia su V che rende continui tutti i funzionali di V^* che sono tutti della forma $v \mapsto \langle v^*, v \rangle$. V^* sarà invece munito della topologia $\sigma(V^*, V)$, detta anch'essa *topologia debole*. $\sigma(V^*, V)$ è la più debole topologia che rende continui i funzionali su V^* della forma $v^* \mapsto \langle v^*, v \rangle$ al variare di v^* nel duale di V . Le topologie $\sigma(V, V^*)$ e $\sigma(V^*, V)$ sono le più deboli topologie che rendono V e V^* rispettivamente spazi vettoriali topologici localmente convessi.

Data $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ indichiamo con $\text{dom } F$ l'insieme

$$\text{dom } F := \{v \in V : F(v) < +\infty\}$$

2.1 Introduzione, trasformata di Fenchel

Ricordiamo che un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale si dice convesso se per ogni x, y elementi di C e per ogni $\lambda > 0$ il punto $\lambda x + (1 - \lambda)y$ è un

2.1. Introduzione, trasformata di Fenchel

elemento di C .

Definizione 2.1 (Funzioni convesse). Sia C un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale V . Una funzione $F : C \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ è detta *convessa* se

$$F(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1 - \lambda)F(v) \quad (2.1)$$

per ogni coppia u, v di elementi di C e $\lambda \in [0, 1]$ tali che il secondo membro della (2.1) sia definita.

Osservazione 2.2. L'estremo superiore di funzioni convesse è convessa.

Ricordiamo il seguente lemma sulle proprietà di continuità delle funzioni convesse.

Lemma 2.3. *Sia $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ una funzione convessa e U un intorno di un punto v_0 tale che si abbia $F(v) \leq a < +\infty$ per ogni $v \in U$. Allora F è continua in v_0 .*

Dimostrazione. Per traslazione possiamo supporre che $v_0 = 0$ e $F(v_0) = 0$. Poniamo $S = U \cap (-U)$. Preso $0 < \varepsilon < 1$ e $v \in \varepsilon S$, si presentano due casi: $v/\varepsilon \in U$ oppure $-v/\varepsilon \in U$. Nel primo caso abbiamo

$$F(v) = F\left((1 - \varepsilon)0 + \varepsilon\left(\frac{v}{\varepsilon}\right)\right) \leq (1 - \varepsilon)F(0) + \varepsilon F\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) \leq a\varepsilon$$

Nel secondo invece

$$0 = F(0) = F\left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\left(-\frac{v}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{1 + \varepsilon}v\right) \leq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}F\left(-\frac{v}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{1 + \varepsilon}F(v)$$

da cui

$$F(v) \geq -\varepsilon F\left(-\frac{v}{\varepsilon}\right) \geq -a\varepsilon$$

Abbiamo dunque dimostrato che $|F(v)| \leq a\varepsilon$. □

Definizione 2.4 (Funzioni semicontinue inferiormente). Una funzione $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ è detta *semicontinua inferiormente* in u_0 se

$$F(u_0) \leq \liminf_{u \rightarrow u_0} F(u) \quad (2.2)$$

Se la condizione (2.2) è verificata per ogni u_0 di V , F è detta *semicontinua inferiormente*.

2.1. Introduzione, trasformata di Fenchel

Osservazione 2.5. Una condizione equivalente alla (2.2) per ogni u_0 in V è che per ogni $a \in \mathbf{R}$, l'insieme

$$F^a = \{v \in V : F(v) > a\}$$

sia aperto. Pertanto l'estremo superiore di funzioni semicontinue inferiormente è semicontinuo inferiormente.

Definizione 2.6 (Epigrafico). Sia $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. L'insieme

$$\text{epi } F := \{(u, \alpha) \in V \times \mathbf{R} : F(u) \leq \alpha\}$$

è detto *epigrafico* di F .

Ricordiamo l'enunciato del seguente ben noto teorema.

Teorema 2.7. *Sia V uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e separabile e sia $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Allora*

- F è convessa se e solo se $\text{epi } F$ è un sottoinsieme convesso di $V \times \mathbf{R}$.
- F è semicontinua inferiormente se e solo se $\text{epi } F$ è un sottoinsieme chiuso di $V \times \mathbf{R}$.

Definizione 2.8 (Coniugata o trasformata di Fenchel). Sia V uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e separabile. Sia $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. La funzione $F^* : V^* \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ definita da

$$F(v^*) := \sup\{\langle v^*, v \rangle - F(v) : v \in V\} \quad (2.3)$$

è detta *coniugata* o *trasformata di Fenchel* di F .

Esempio 2.9. Sia V uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e separabile. Dato un sottoinsieme K di V , sia F la funzione definita da

$$F(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in K \\ +\infty & \text{se } u \notin K \end{cases}$$

Allora la trasformata di Fenchel di F

$$F^*(u^*) = \sup \{\langle u^*, u \rangle : u \in K\}$$

viene detta *funzione d'appoggio* di K .

2.1. Introduzione, trasformata di Fenchel

Osservazione 2.10 (Interpretazione geometrica). Osserviamo che la funzione affine $u \mapsto \langle u^*, u \rangle - \alpha$ è un minorante di F se e soltanto se $\alpha \geq F^*(u^*)$ e $F^*(u^*)$ è il più piccolo α per cui vale questa minorazione.

Osservazione 2.11. Notiamo che

$$F(v^*) = \sup\{\langle v^*, v \rangle - F(v) : F(v) < \infty\}$$

Siccome le funzioni $v^* \mapsto \langle v^*, v \rangle - F(v)$ sono convesse e semicontinue inferiormente per tutti i $v \in V$ tali che $F(v) < \infty$, segue che F^* è una funzione convessa e semicontinua inferiormente.

Osservazione 2.12. Le seguenti proprietà sono di immediata verifica:

- $F^*(0) = -\inf_{u \in V} F(u)$
- $F \leq G \implies F^* \geq G^*$
- $F = \pm\infty \implies F^* = \mp\infty$
- $(\lambda F)^*(u^*) = \lambda F^*(u^*/\lambda)$ per ogni $\lambda > 0$
- $(F + \alpha)^* = F^* - \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$

Definizione 2.13 (Biconiugata). La funzione $F^{**} : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ definita da

$$F^{**}(v) := \sup\{\langle v^*, v \rangle - F^*(u^*) : v^* \in V^*\} \quad (2.4)$$

è detta *biconiugata* di F .

Proposizione 2.14. Sia $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Allora sono equivalenti:

1. F è estremo superiore di una famiglia di funzioni affini e continue.
2. $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ è una funzione convessa, semicontinua inferiormente tale che è identicamente uguale a $-\infty$ o non assume il valore $-\infty$.

Dimostrazione.

1 \implies 2 L'estremo superiore di una famiglia vuota di funzioni affini e continue è $-\infty$. Se la famiglia non è vuota certamente questo estremo superiore non può assumere il valore $-\infty$.

2.1. Introduzione, trasformata di Fenchel

$2 \Rightarrow 1$ Sia F una funzione convessa, semicontinua inferiormente tale che è identicamente uguale a $-\infty$ o non assume il valore $-\infty$. Se F assume il valore $+\infty$ o $-\infty$ identicamente, allora la tesi è ovvia. Supponiamo allora che F non sia identicamente $+\infty$ o $-\infty$. Sia $\alpha_0 < F(u_0)$. Ci proponiamo di costruire una funzione lineare affine L tale che $L(u) \leq F(u)$ e $\alpha_0 < L(u_0) \leq F(u_0)$. Poiché F convessa e semicontinua, per il teorema 2.7 $\text{epi } F$ è un chiuso convesso di $V \times \mathbf{R}$. Per il teorema di Hahn-Banach possiamo trovare un funzionale lineare continuo su $V \times \mathbf{R}$ che separa $\text{epi } F$ e il punto (u_0, α_0) . Possiamo supporre che questo funzionale sia della forma $\Phi(u, \alpha) = \phi(u) + k\alpha$ dove ϕ è un funzionale lineare e continuo su V . Avremo allora per un opportuno $\varepsilon > 0$

$$\phi(u_0) + k\alpha_0 < c - \varepsilon \quad (2.5)$$

e

$$\phi(u) + k\alpha > c + \varepsilon \quad \text{per ogni } (u, \alpha) \in \text{epi } F \quad (2.6)$$

Supponiamo che $F(u_0) < \infty$. Ponendo nella (2.6) $u = u_0$ e $\alpha = F(u_0)$ e confrontando con la (2.5) si ottiene $k(F(u_0) - \alpha_0) > 0$, da cui $k > 0$. Posto allora

$$L(u) = \frac{c}{k} - \frac{1}{k}\phi(u) \quad (2.7)$$

si ottiene sostituendo nella (2.6) $u = u_0$ e $\alpha = F(u_0)$ e utilizzando anche la (2.5) che

$$\alpha_0 < L(u_0) < F(u_0)$$

Se invece $F(u_0) = \infty$ e ancora una volta $k > 0$ si può fare la stessa dimostrazione. Se invece $k = 0$ si costruisce con il procedimento di prima un funzionale lineare e continuo che minora F . Supponiamo che sia della forma $\Psi(u, \alpha) = \psi(u) + h\alpha$. Allora il funzionale

$$L(u) = \psi(u) + h\alpha + n(c - \phi(u))$$

è quello cercato pur di scegliere n abbastanza grande in modo che

$$L(u) = \psi(u) + h\alpha + n(c - \phi(u)) > \alpha_0 \quad \square$$

È molto interessante la seguente caratterizzazione della biconiugata di una funzione F .

2.1. Introduzione, trasformata di Fenchel

Definizione 2.15 (Γ -regolarizzata). Data $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$, definiamo

$$\Gamma(F) := \sup\{g : g \text{ affine e continua, } g \leq F\} \quad (2.8)$$

$\Gamma(F)$ è detta Γ -regolarizzata di F .

Osservazione 2.16. Naturalmente, in quanto $\Gamma(F)$ è estremo superiore di funzioni minori o uguali a F si ha $\Gamma(F) \leq F$.

Notazione. In seguito $\Gamma(V)$ indicherà l'insieme delle funzioni $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ che sono l'estremo superiore di una famiglia di funzioni affini continue. $\Gamma_0(V)$ invece indicherà l'insieme delle funzioni di $\Gamma(V)$ che non sono identicamente $+\infty$ o $-\infty$.

Proposizione 2.17. Sia V uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e separabile e sia $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Allora F^{**} è la Γ -regolarizzata di F . In particolare, $F^{**} \leq F$ e se $F \in \Gamma(V)$, allora $F^{**} = F$.

Dimostrazione. Per l'osservazione 2.10 se per ogni $u \in V$, $F(u) \geq \langle u^*, u \rangle - \alpha$, allora $\alpha \geq F^*(u^*)$. Quindi

$$\begin{aligned} \Gamma(F) &= \sup\{g : g \text{ affine e continua, } g \leq F\} = \\ &= \sup\{\langle v^*, v \rangle - F^*(u^*) : v^* \in V^*\} \end{aligned}$$

che è la tesi. □

Osservazione 2.18. Per l'osservazione 2.12 (punto 3) e la proposizione 2.17, se $F \in \Gamma_0(V)$, allora $F^* \in \Gamma_0(V^*)$.

La dimostrazione del seguente lemma è molto semplice e segue da facili calcoli che tralasciamo.

Lemma 2.19. Siano p, p' esponenti coniugati, cioè

$$p, p^* \in]1, \infty[, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

Le funzioni

$$f(s) = \frac{1}{p}|s|^p, \quad g(t) = \frac{1}{p^*}|t|^{p^*}$$

sono una la trasformata dell'altra.

Il lemma appena presentato, insieme alla prossima proposizione, saranno molto utili nel seguito.

Proposizione 2.20. *Sia V uno spazio normato. Sia φ un elemento di $\Gamma_0(\mathbf{R})$ tale che $\varphi(u) = \varphi(-u)$. Allora le funzioni*

$$F(u) = \varphi(\|u\|), \quad G(u^*) = \varphi^*(\|u^*\|_*)$$

sono una la coniugata dell'altra.

Dimostrazione. Notiamo innanzi tutto che $F \in \Gamma(V)$ e $G \in \Gamma(V^*)$. Mostriamo soltanto che $F^* = G$. Infatti dalla proposizione 2.17 seguirà il resto della tesi: $F = F^{**} = G^*$. A tal fine abbiamo:

$$\begin{aligned} F(u^*) &= \sup \{ \langle u^*, u \rangle - \varphi(\|u\|) : u \in V \} \\ &= \sup_{t \geq 0} \sup \{ \langle u^*, u \rangle - \varphi(\|u\|) : u \in V, \|u\| = t \} \\ &= \sup_{t \geq 0} \{ t\|u^*\|_* - \varphi(t) \} \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$= \sup_{t \in \mathbf{R}} \{ t\|u^*\|_* - \varphi(t) \} = \varphi^*(\|u^*\|_*) \tag{2.10}$$

Il passaggio da (2.9) a (2.10) è possibile grazie al fatto che φ è pari. \square

Esempio 2.21. Dall'ultima proposizione dimostrata e dal lemma che lo precede segue che le funzioni

$$u \mapsto \frac{1}{p}\|u\|^p, \quad u^* \mapsto \frac{1}{p'}\|u^*\|_*^{p'}$$

sono una la coniugata dell'altra.

2.2 Sottodifferenziabilità

In questa sezione V sarà come al solito uno spazio vettoriale localmente convesso e separabile e V^* designerà il suo duale.

Definizione 2.22. Una funzione $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ si dice *sottodifferenziabile* in un punto v_0 di V se $F(v_0)$ è finito ed esiste un elemento $v_0^* \in V^*$ tale che

$$F(v) \geq F(v_0) + \langle v_0^*, v - v_0 \rangle \tag{2.11}$$

per ogni $v \in V$. Ogni elemento $v_0^* \in V^*$ tale che valga la (2.11) è detto un *sottogradiente* di F in v_0 . Inoltre il *sottodifferenziale* di F in v_0 sarà l'insieme costituito dai sottogradienti, cioè

$$\partial F(v_0) := \{ v^* \in V^* : F(v) \geq F(v_0) + \langle v^*, v - v_0 \rangle \} \tag{2.12}$$

Quindi per definizione una funzione è sottodifferenziabile in v_0 se e soltanto se $F(v_0)$ è finito e l'insieme dei sottogradienti non è vuoto.

2.2. Sottodifferenziabilità

Osservazione 2.23. Una semplice conseguenza della definizione 2.22 è che

$$F(v_0) = \min_{v \in V} F(v) \iff 0 \in \partial F(v_0)$$

Inoltre valgono le implicazioni seguenti

$$\partial F(v_0) = \emptyset \iff F(v_0) = F^{**}(v_0) \quad (2.13)$$

$$F(v_0) = F^{**}(v_0) \iff \partial F(v_0) = \partial F^{**}(v_0) \quad (2.14)$$

Entrambe seguono dal fatto che se L è una funzione affine e continua tale che $L \leq F$ allora $L = L^{**} \leq F^{**} \leq F$.

Se nel primo caso si ha $v_0^* \in \partial F(v_0)$ e si prende $L(v) = F(v_0) + \langle v_0^*, v - v_0 \rangle$, si avrà $L(v_0) = F^{**}(v_0) = F(v_0)$. Viceversa prendendo la parte lineare di un funzionale affine e continuo che separa il punto $(v_0, F^{**}(v_0))$ da $\text{epi } F^{**}$ si ottiene un sottodifferenziale di F in v_0 grazie al fatto che $F(v_0) = F^{**}(v_0)$.

Nel secondo caso invece se $v_0^* \in \partial F(v_0)$ allora $F(v) \geq F(v_0) + \langle v_0^*, v - v_0 \rangle$ e poiché F^{**} è la Γ -regolarizzata si ha anche $F^{**}(v) \geq F(v_0) + \langle v_0^*, v - v_0 \rangle$. Viceversa, se $F^{**}(v) \geq F^{**}(v_0) + \langle v_0^*, v - v_0 \rangle$, poiché $F^{**} \leq F$, $F(v) \geq F(v_0) + \langle v_0^*, v - v_0 \rangle$.

I seguenti enunciati descrivono delle proprietà geometriche di ∂F .

Proposizione 2.24. *Sia F una funzione $V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Allora*

$$v_0^* \in \partial F(v_0) \iff F(v_0) + F^*(v_0^*) = \langle v_0, v_0^* \rangle$$

Dimostrazione.

\Rightarrow Siccome $v_0^* \in \partial F(v_0)$, abbiamo che $F(v) \geq F(v_0) + \langle v_0^*, v - v_0 \rangle$ cioè $F(v) \geq \langle v_0^*, v \rangle + F(v_0) - \langle v_0^*, v_0 \rangle$. Siccome il funzionale affine e continuo $L(v) = \langle v_0^*, v \rangle + F(v_0) - \langle v_0^*, v_0 \rangle$ è massimale, si dovrà avere

$$F^*(v_0^*) = -F(v_0) + \langle v_0^*, v_0 \rangle$$

che è la prima parte dell'enunciato.

\Leftarrow Viceversa il funzionale affine e continuo definito da

$$L(v) := \langle v_0^*, v \rangle + F(v_0) - \langle v_0^*, v_0 \rangle = \langle v_0^*, v \rangle - F^*(v_0^*)$$

è minore o uguale a F e $F(v_0) = L(v_0)$, quindi $v_0^* \in \partial F(v_0)$. \square

Corollario 2.25. *L'insieme $\partial F(v)$ è convesso e chiuso per la topologia $\sigma(V^*, V)$.*

Dimostrazione. Per definizione per la trasformata di Fenchel vale la seguente disuguaglianza

$$F^*(v^*) - \langle v^*, v \rangle \geq -F(v)$$

quindi $F^*(v^*) - \langle v^*, v \rangle = -F(v)$ è equivalente a $F^*(v^*) - \langle v^*, v \rangle \leq -F(v)$. Possiamo allora scrivere

$$\partial F(v) = \{v^* \in V^* : F^*(v^*) - \langle v^*, v \rangle \leq -F(v)\}$$

Siccome la funzione $v^* \mapsto F^*(v^*) - \langle v^*, v \rangle$ è convessa e continua (anche per la topologia $\sigma(V^*, V)$), l'insieme $\partial F(v)$ è convesso perché il sottolivello di una funzione convessa è convesso e chiuso perché è la controimmagine di un sottoinsieme chiuso. \square

Riassumendo:

Corollario 2.26. *Per ogni funzione $F : V \rightarrow \mathbf{R}$ abbiamo che*

$$u^* \in \partial F(u) \implies u \in \partial F^*(u^*)$$

In più, se $F \in \Gamma(V)$ allora

$$u^* \in \partial F(u) \iff u \in \partial F^*(u^*)$$

Il seguente teorema invece ci fornisce un utile criterio per stabilire se una funzione convessa sia sottodifferenziabile in un dato punto.

Teorema 2.27. *Sia $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ una funzione convessa. Supponiamo che nel punto v_0 , F assuma un valore finito e che F sia finita in v_0 . Allora $\partial F(v_0) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Siccome F è convessa, $\text{epi } F$ è un sottoinsieme convesso di $V \times \mathbf{R}$. Inoltre siccome F è continua, $\text{epi } F$ è non vuoto. Per vedere questo basta notare che F è limitata da una costante M su un aperto U contenente v_0 . Chiaramente, l'insieme $U \times]M, +\infty[$ è un sottoinsieme aperto non vuoto di $V \times \mathbf{R}$ contenuto in $\text{epi } F$.

Il punto $(v_0, F(v_0))$ sta nel bordo di $\text{epi } F$. Possiamo allora trovare un iperpiano \mathcal{H} che separa il punto $(v_0, F(v_0))$ da $\text{epi } F$. Abbiamo allora:

$$\mathcal{H} = \{(v, a) \in V \times \mathbf{R} : \langle v^*, v \rangle + \alpha a = \beta\}$$

2.3. Relazioni di dualità

dove v^* è un opportuno elemento di V^* , α e β sono reali. Inoltre avremo

$$\langle v^*, v \rangle + \alpha a \geq \beta$$

per ogni $(v, a) \in \text{epi } F$ e $\langle v^*, v \rangle + \alpha F(v) = \beta$. Se $\alpha = 0$ si deve avere che $\langle v^*, v - v_0 \rangle \geq 0$ per ogni $v \in \text{dom } F$. Poiché $\text{dom } F$ è un intorno di v_0 , segue che $v^* = 0$. Pertanto si ha $\alpha > 0$ e

$$\beta/\alpha - \langle v^*/\alpha, v \rangle \leq F(v)$$

per ogni $v \in \text{dom } F$ e

$$\beta/\alpha - \langle v^*/\alpha, v_0 \rangle = F(v_0)$$

Quindi si trova che

$$\langle -v^*/\alpha, v - v_0 \rangle + F(v_0) \leq F(v)$$

La sottodifferenziabilità segue dunque dal fatto che $\partial F(v_0) \neq \emptyset$ in quanto $-v^*/\alpha \in \partial F(v_0)$. \square

2.3 Relazioni di dualità

Sia V uno spazio vettoriale topologico, $F : V \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Siamo interessati al seguente problema di minimizzazione

$$\mathcal{P} := \inf_{u \in V} F(u) \tag{2.15}$$

Ci riferiremo a questo con il termine di *problema primario* e lo indicheremo con \mathcal{P} . La maggior parte delle volte supporremo che $F \in \Gamma_0(V)$ in modo che il problema non sia banale: in questo caso infatti F non è identicamente uguale a $+\infty$ e, non essendo identicamente $-\infty$, per la proposizione 2.14 non può assumere il valore $-\infty$.

Sia Y uno spazio vettoriale topologico e Y^* il suo duale. Vogliamo definire il *problema duale* di quello definito dalla (2.15). Per questo considereremo una arbitraria *perturbazione* del problema primario, dove per perturbazione si intende una applicazione

$$\Phi : V \times Y \rightarrow \mathbf{R}$$

tale che

$$\Phi(u, 0) = F(u)$$

Per ogni $p \in Y$ consideriamo il *problema perturbato*

$$\mathcal{P}_p := \inf_{u \in V} \Phi(u, p) \quad (2.16)$$

Notiamo che per $p = 0$ si ottiene il problema originale: $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$. Ricordiamo che il duale topologico di $V \times Y$ è isomorfo a $V^* \times Y^*$ e la dualità tra questi due spazi è data da

$$\langle (u, p), (u^*, p^*) \rangle = \langle u^*, u \rangle + \langle p^*, p \rangle$$

Allora $\Phi^* \in \Gamma(V^* \times Y^*)$. Il *problema duale* di \mathcal{P} è definito da

$$\mathcal{P}^* := \sup_{p^* \in Y^*} \{-\Phi^*(0, p^*)\} \quad (2.17)$$

Lo indicheremo con \mathcal{P}^* . Inoltre considerando la perturbazione naturale del problema 2.17 data dalla funzione

$$-\Phi^* : V^* \times Y^* \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$$

Il problema perturbato si ottiene al variare di u^* in V^* :

$$\mathcal{P}_{u^*}^* := \sup_{p^* \in Y^*} \{-\Phi^*(u^*, p^*)\}$$

Il problema biduale \mathcal{P}^{**} di (2.15) è dunque dato da

$$\mathcal{P}^{**} := \inf_{u \in V} \Phi^{**}(u, 0)$$

La seguente proposizione mette in relazione un problema e il suo duale.

Proposizione 2.28. *Sia V uno spazio vettoriale topologico. Allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$-\infty \leq \mathcal{P}^* \leq \mathcal{P} \leq +\infty \quad (2.18)$$

Dimostrazione. Per definizione

$$\Phi^*(u^*, p^*) = \sup\{\langle u^*, u \rangle + \langle p^*, p \rangle - \Phi(u, p) : u \in V, p \in Y\}$$

2.3. Relazioni di dualità

Da ciò si ottiene

$$\Phi^*(u^*, p^*) \geq \langle u^*, u \rangle + \langle p^*, p \rangle - \Phi(u, p) \quad (2.19)$$

per ogni $u \in V$ e per ogni $p \in Y$. In particolare, ponendo nella (2.19) $u^* = 0$ e $p = 0$ si ottiene

$$\Phi(u, 0) \leq -\Phi^*(0, p^*)$$

da cui passando all'estremo inferiore nel primo membro e all'estremo superiore nel secondo membro

$$\inf_{u \in V} \Phi(u, 0) \leq \sup_{p^* \in Y^*} \{-\Phi^*(0, p^*)\}$$

che è la tesi. □

È interessante notare che esistono esempi in cui la seconda disuguaglianza della (2.18) è stretta e quindi l'uguaglianza dei due problemi seguirà da ulteriori ipotesi sulla funzione F e sulla perturbazione Φ . Per trovare queste condizioni dovremo introdurre due classi di problemi: i *problemi normali* e i *problemi stabili*.

Supporremo d'ora in poi $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$ e consideriamo la funzione $h : Y \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ definita da

$$h(p) := \inf_{u \in V} \Phi(u, p) = \mathcal{P}_p \quad (2.20)$$

Notiamo che in questo caso per il teorema 2.17 abbiamo che $\Phi = \Phi^{**}$ e quindi $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{**}$. Il contenuto del seguente lemma è che h è una funzione convessa.

Lemma 2.29. *Se Φ è convessa, allora la funzione h è convessa.*

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che dati p e q in Y e $0 \leq \lambda \leq 1$ si ha

$$h(\lambda p + (1 - \lambda)q) \leq \lambda h(p) + (1 - \lambda)h(q)$$

Se $h(p) = +\infty$ o $h(q) = +\infty$ la disuguaglianza è ovvia. Supponiamo allora $h(p) < +\infty$ e $h(q) < +\infty$. Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo $u, v \in V$ in modo che

$$\Phi(u, p) \leq h(p) + \varepsilon, \quad \Phi(v, q) \leq h(q) + \varepsilon$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} h(\lambda p + (1 - \lambda)q) &= \inf_{w \in V} \Phi(w, \lambda p + (1 - \lambda)q) \\ &\leq \Phi(\lambda u + (1 - \lambda)v, \lambda p + (1 - \lambda)q) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} &\leq \lambda \Phi(u, p) + (1 - \lambda)\Phi(v, q) \quad (2.22) \\ &\leq \lambda h(p) + (1 - \lambda)h(q) + \varepsilon \end{aligned}$$

2.3. Relazioni di dualità

Il passaggio dalla (2.21) alla (2.22) è grazie alla convessità di Φ . Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. \square

Lemma 2.30. *Supponiamo che $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$. Per la trasformata di Fenchel di h vale la seguente uguaglianza:*

$$h^*(p^*) = \Phi^*(0, p^*)$$

per ogni $p^* \in Y^*$

Dimostrazione. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} h^*(p^*) &= \sup_{p \in Y} \{\langle p^*, p \rangle - h(p)\} \\ &= \sup_{p \in Y} \{\langle p^*, p \rangle - \inf_{u \in V} \Phi(u, p)\} \\ &= \sup_{p \in Y} \sup_{u \in V} \{\langle p^*, p \rangle - \Phi(u, p)\} \\ &= \Phi^*(0, p^*) \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 2.31. Osserviamo che in base alle definizioni date

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^* = \sup_{p^* \in Y^*} \{-\Phi^*(0, p^*)\} &= \sup_{p^* \in Y^*} \{-h^*(p^*)\} = h^{**}(0) \leq \\ &\leq h(0) = \inf_{u \in V} \{\Phi(u, 0)\} = \mathcal{P} \end{aligned}$$

Quindi la disuguaglianza $\mathcal{P}^* \leq \mathcal{P}$ non è altro che un caso particolare di $h^{**}(p) \leq h(p)$. Inoltre l'uguaglianza $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ si verificherà quando $h^{**}(0) = h(0)$.

Definizione 2.32 (Problema normale). Il problema \mathcal{P} è detto *normale* se la funzione h definita dalla (2.20) è finita e semicontinua inferiormente in 0.

Proposizione 2.33. *Supponiamo che $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$. I seguenti tre fatti sono equivalenti:*

1. Il problema \mathcal{P} è normale
2. Il problema \mathcal{P}^* è normale
3. $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$ e il comune valore è finito

2.3. Relazioni di dualità

Dimostrazione.

1 \Rightarrow 3 Sia \bar{h} l'estremo superiore delle funzioni semicontinue inferiormente minori o uguali a h . Allora abbiamo $h^{**} \leq \bar{h} \leq h$. Inoltre poiché h è semicontinua inferiormente in 0 abbiamo che $\bar{h}(0) = h(0)$. Poiché h è convessa, anche \bar{h} è convessa. La convessità di h , unitamente al fatto che è semicontinua inferiormente e che $\bar{h}(0) \in \mathbf{R}$, comporta che per ogni x , $h(x) > -\infty$. Abbiamo allora che $\bar{h} \in \Gamma_0(V)$, quindi da $\bar{h}^{**} = \bar{h}$ segue

$$h^* = h^{***} \geq \bar{h}^* \geq h^*$$

da cui $h^* = \bar{h}^*$ e $h^{**} = \bar{h}^{**} = \bar{h}$. Ricordando l'osservazione 2.31 abbiamo trovato che $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$ e il comune valore è finito.

3 \Leftarrow 1 Abbiamo infatti che $h(0) = h^{**}(0)$ e sono finiti. Inoltre dalla $h^{**} \leq \bar{h} \leq h$ segue che $h(0) = \bar{h}(0)$ e quindi $h(0)$ è finito e h è semicontinua inferiormente in 0.

2 \Leftrightarrow 3 Per quanto abbiamo appena dimostrato abbiamo che il problema \mathcal{P}^* è normale se e solo se $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^{**}$ e il comune valore è finito. Basta a questo punto notare che i problemi \mathcal{P} e \mathcal{P}^{**} sono identici. \square

Ora vogliamo trovare delle condizioni che garantiscano l'esistenza della soluzione oltre al fatto che $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$.

Definizione 2.34. Il problema \mathcal{P} è *stabile* $h(0)$ è finito e h è sottodifferenziabile in 0.

Lemma 2.35. L'insieme delle soluzioni del problema \mathcal{P}^* è $\partial h^{**}(0)$.

Dimostrazione. Sia $p^* \in Y^*$ una soluzione del problema \mathcal{P}^* . Allora abbiamo per ogni $q^* \in Y^*$

$$\begin{aligned} -\Phi^*(0, p^*) &\geq -\Phi^*(0, q^*) \\ -h^*(p^*) &\geq -h^*(q^*) \\ -h^*(p^*) &\geq \sup_{q^* \in Y^*} \{\langle 0, q^* \rangle - h^*(q^*)\} \\ -h^*(p^*) &\geq h^{**}(0) \end{aligned} \tag{2.23}$$

e ciò è equivalente a

$$p^* \in \partial h^{**}(0) \tag{2.24}$$

Infatti abbiamo che se vale la (2.23) per ogni $q \in Y$

$$h^{**}(q) \geq \langle p^*, q \rangle - h^* p^* \geq \langle p^*, q \rangle + h^{**}(0)$$

che non è altro che la (2.24). Viceversa se vale la (2.24) abbiamo che per ogni $q \in Y$

$$-h^{**}(0) \geq \langle p^*, q \rangle - h^{**}(q)$$

Passando all'estremo superiore al variare di $q \in Y$ si ottiene

$$-h^{**}(0) \geq h^{***}(p^*) = h^*(p^*)$$

che non è altro che la (2.23). \square

Proposizione 2.36. *Supponiamo che $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$. I seguenti fatti sono equivalenti:*

1. \mathcal{P} è stabile
2. \mathcal{P} è normale e \mathcal{P}^* ha almeno una soluzione

Dimostrazione.

1. Se \mathcal{P} è stabile, allora $h(0)$ è finito e $\partial h(0)$ è non vuoto. Per la (2.13) segue allora che $h(0) = h^{**}(0)$. Il problema \mathcal{P} è quindi normale. Inoltre $\partial h^{**}(0) = \partial h(0) \neq \emptyset$ e, per il lemma 2.35, $\partial h^{**}(0)$ è l'insieme delle soluzioni del problema \mathcal{P}^* .
2. Siccome \mathcal{P} è normale, allora $h(0)$ è finito, $h(0) = h^{**}(0)$. Quindi $\partial h(0) = \partial h^{**}(0) \neq \emptyset$ grazie al lemma 2.35 e al fatto che il problema \mathcal{P}^* ha almeno una soluzione. \square

Come conseguenza di quanto dimostrato fino ad ora abbiamo il seguente corollario.

Corollario 2.37. *Supponiamo che $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$. I seguenti tre fatti sono equivalenti:*

1. I problemi \mathcal{P} e \mathcal{P}^* sono normali e ammettono soluzione
2. I problemi \mathcal{P} e \mathcal{P}^* sono stabili
3. \mathcal{P} è stabile e ammette soluzioni

2.3. Relazioni di dualità

Il risultato che ora presentiamo è un criterio per decidere se il problema \mathcal{P} è stabile.

Proposizione 2.38 (Criterio di stabilità). *Supponiamo che Φ appartenga a $\Gamma_0(V \times Y)$, \mathcal{P} sia finito e*

$$p \mapsto \Phi(u_0, p) \quad (2.25)$$

assuma un valore reale per $p = 0$ e sia continua in $p = 0$ per qualche $u_0 \in V$. Allora il problema \mathcal{P} è stabile.

Dimostrazione. Per il lemma 2.29 h è una funzione convessa. Inoltre per le ipotesi si ha che $h(0) = \inf_{v \in V} \Phi(u, 0) = \inf_{v \in V} F(v) = \mathcal{P}$ è finito. Poiché la funzione $p \mapsto \Phi(u_0, p)$ è continua in 0, si può trovare un intorno U di 0 in Y tale che

$$\Phi(u_0, p) \leq M < +\infty$$

per ogni $p \in U$. Allora

$$h(p) = \inf_{v \in V} \Phi(u, p) \leq \Phi(u_0, p) \leq M$$

per ogni $p \in U$. Per il lemma 2.3 è h continua in 0, per il teorema 2.27 è sottodifferenziabile in 0. \square

L'ultimo risultato che presentiamo in questa sezione fornisce una relazione fra la soluzione del problema \mathcal{P} e del problema \mathcal{P}^* . Osserviamo che per definizione di trasformata

$$\Phi(u, 0) + \Phi^*(0, p^*) \geq \langle (u, 0), (0, p^*) \rangle = 0$$

per ogni u e p^* in V e Y^* rispettivamente. Il contenuto della proposizione seguente è che le soluzioni dei problemi \mathcal{P} e \mathcal{P}^* realizzano l'uguaglianza.

Proposizione 2.39. *Supponiamo che i problemi \mathcal{P} e \mathcal{P}^* abbiano soluzioni e*

$$-\infty < \mathcal{P} = \mathcal{P}^* < +\infty \quad (2.26)$$

Se \bar{u} è una soluzione di \mathcal{P} e \bar{p}^ è una soluzione di \mathcal{P}^* allora vale la seguente relazione di estremalità:*

$$\Phi(\bar{u}, 0) + \Phi^*(0, \bar{p}^*) = 0 \quad (2.27)$$

2.4. Studio di un caso particolare

o, equivalentemente,

$$(0, \bar{p}^*) \in \partial\Phi(\bar{u}, 0) \quad (2.28)$$

Viceversa, se \bar{u} e \bar{p}^* soddisfano la (2.27), allora \bar{u} è una soluzione di \mathcal{P} , \bar{p}^* è una soluzione di \mathcal{P}^* e vale la (2.26).

Dimostrazione. Abbiamo

$$\mathcal{P} = \Phi(\bar{u}, 0) = \mathcal{P}^* = -\Phi^*(0, \bar{p}^*)$$

che è la (2.27). Osservando che

$$\Phi(\bar{u}, 0) + \Phi^*(0, \bar{p}^*) = \langle (\bar{u}, 0), (0, \bar{p}^*) \rangle$$

per la proposizione 2.24 si ottiene la (2.28).

Viceversa se \bar{u} e \bar{p}^* soddisfano la (2.27) abbiamo

$$\Phi(\bar{u}, 0) = \inf_{u \in V} \Phi(u, 0)$$

$$-\Phi^*(0, \bar{p}^*) = \sup_{p^* \in Y^*} \{-\Phi^*(0, p^*)\}$$

cioè $-\infty < \mathcal{P} = \mathcal{P}^* < +\infty$. □

2.4 Studio di un caso particolare

Questo caso particolare che ci accingiamo a studiare è molto utile nel Calcolo delle Variazioni. Utilizzando quanto abbiamo presentato fino ad ora dimostreremo varie relazioni di dualità.

Siano V e Y spazi vettoriali topologici localmente convessi e separabili e siano V^* e Y^* i rispettivi duali topologici. Indichiamo con Λ un operatore lineare continuo di V in Y e con Λ^* il suo aggiunto. Ci interessa il problema \mathcal{P} di minimizzare la funzione $F(u) = J(u, \Lambda u)$ al variare di $u \in V$:

$$\mathcal{P} := \inf_{u \in V} J(u, \Lambda u) \quad (2.29)$$

Il problema duale sarà preso rispetto alla perturbazione

$$\Phi(u, p) = J(u, \Lambda u - p) \quad (2.30)$$

2.4. Studio di un caso particolare

Detta $J^* \in \Gamma(V^* \times Y^*)$ la coniugata di J , abbiamo

$$\begin{aligned}
\Phi^*(0, p^*) &= \sup_{(u,p) \in V \times Y} \{ \langle p^*, p \rangle - J(u, \Lambda u - p) \} \\
&= \sup_{u \in V} \sup_{p \in Y} \{ \langle p^*, p \rangle - J(u, \Lambda u - p) \} \\
&= \sup_{u \in V} \sup_{q \in Y} \{ \langle p^*, \Lambda u \rangle - \langle p^*, q \rangle - J(u, q) \} \\
&= \sup_{(u,q) \in V \times Y} \{ \langle p^*, \Lambda u \rangle - \langle p^*, q \rangle - J(u, q) \} \\
&= J^*(\Lambda^* p^*, -p^*)
\end{aligned}$$

Il problema \mathcal{P}^* , duale di \mathcal{P} , è quindi

$$\mathcal{P}^* := \sup_{p^* \in Y^*} \{ -J^*(\Lambda^* p^*, -p^*) \} \quad (2.31)$$

Vale il seguente risultato.

Teorema 2.40. *Supponiamo che J sia convessa, che \mathcal{P} sia finito e che l'applicazione*

$$p \mapsto J(u_0, p)$$

sia finita in Λu_0 e continua in Λu_0 per un opportuno $u_0 \in V$. Allora il problema \mathcal{P} è stabile o, equivalentemente, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^$ e il problema duale \mathcal{P}^* ammette soluzioni.*

Dimostrazione. Basta applicare il criterio di stabilità del teorema 2.38. \square

Proposizione 2.41. *Supponiamo che i problemi \mathcal{P} e \mathcal{P}^* abbiano soluzioni e*

$$-\infty < \mathcal{P} = \mathcal{P}^* < +\infty \quad (2.32)$$

Se \bar{u} è una soluzione di \mathcal{P} e \bar{p}^ è una soluzione di \mathcal{P}^* allora vale la seguente relazione di estremalità:*

$$J(\bar{u}, \Lambda \bar{u}) + J^*(\Lambda^* \bar{p}^*, -\bar{p}^*) = 0 \quad (2.33)$$

o, equivalentemente,

$$(\Lambda^* \bar{p}^*, -\bar{p}^*) \in \partial J(\bar{u}, \Lambda \bar{u}) \quad (2.34)$$

Viceversa, se \bar{u} e \bar{p}^ soddisfano la (2.33), allora \bar{u} è una soluzione di \mathcal{P} , \bar{p}^* è una soluzione di \mathcal{P}^* e vale la (2.32).*

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione 2.39. \square

2.4. Studio di un caso particolare

Possiamo rendere ancora più particolare il problema studiato supponendo che J sia della forma

$$J(u, \Lambda u) = F(u) + G(\Lambda u) \quad (2.35)$$

In questo caso abbiamo

$$\mathcal{P} := \inf_{u \in V} J(u, \Lambda u) = \inf_{u \in V} F(u) + G(\Lambda u) \quad (2.36)$$

Inoltre poiché

$$\begin{aligned} J^*(u^*, p^*) &= \sup_{(u, p) \in V \times Y} \{ \langle u^*, u \rangle + \langle p^*, p \rangle - F(u) - G(p) \} \\ &= \sup_{u \in V} \{ \langle u^*, u \rangle - F(u) \} + \sup_{p \in Y} \{ \langle p^*, p \rangle - G(p) \} \\ &= F^*(u^*) + G^*(p^*) \end{aligned}$$

dove F^* e G^* sono le funzioni coniugate di F e G rispettivamente. Allora

$$\mathcal{P}^* = \sup_{p^* \in Y^*} \{ -F^*(\Lambda^* p^*) - G^*(-p^*) \} \quad (2.37)$$

Come ulteriore particolarizzazione abbiamo il seguente teorema

Teorema 2.42. *Supponiamo che \mathcal{P} sia finito, che F e G siano convesse e che l'applicazione*

$$p \mapsto F(u_0) + G(p)$$

sia finita in Λu_0 e continua in Λu_0 per un opportuno $u_0 \in V$. Allora il problema \mathcal{P} è stabile o, equivalentemente, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^$ e il problema duale \mathcal{P}^* ammette soluzioni.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema 2.4. □

Proposizione 2.43. *Supponiamo che i problemi \mathcal{P} e \mathcal{P}^* abbiano soluzioni e*

$$-\infty < \mathcal{P} = \mathcal{P}^* < +\infty \quad (2.38)$$

Se \bar{u} è una soluzione di \mathcal{P} e \bar{p}^ è una soluzione di \mathcal{P}^* allora valgono le seguenti relazioni di estremalità:*

$$\begin{cases} F(\bar{u}) + F^*(\Lambda^* \bar{p}^*) - \langle \Lambda^* \bar{p}^*, \bar{u} \rangle = 0 \\ G(\Lambda \bar{u}) + G^*(-\bar{p}^*) + \langle \bar{p}^*, \Lambda \bar{u} \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

2.4. Studio di un caso particolare

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} \Lambda^* \bar{p}^* \in \partial F(\bar{u}) \\ -\bar{p}^* \in \partial G(\Lambda \bar{u}) \end{cases} \quad (2.40)$$

Viceversa, se \bar{u} e \bar{p}^* soddisfano w(2.39), allora \bar{u} è una soluzione di \mathcal{P} , \bar{p}^* è una soluzione di \mathcal{P}^* e vale la (2.38).

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione 2.41 osservando che

$$\begin{aligned} 0 &= J(\bar{u}, \Lambda \bar{u}) + J^*(\Lambda^* \bar{p}^*, -\bar{p}^*) \\ &= F(\bar{u}) + F^*(\Lambda^* \bar{p}^*) + G(\Lambda \bar{u}) + G^*(-\bar{p}^*) \\ &= [F(\bar{u}) + F^*(\Lambda^* \bar{p}^*) - \langle \Lambda^* \bar{p}^*, \bar{u} \rangle] + [G(\Lambda \bar{u}) + G^*(-\bar{p}^*) - \langle -\bar{p}^*, \Lambda \bar{u} \rangle] \end{aligned}$$

e che, per le proprietà della trasformata,

$$F(\bar{u}) + F^*(\Lambda^* \bar{p}^*) - \langle \Lambda^* \bar{p}^*, \bar{u} \rangle \geq 0, \quad G(\Lambda \bar{u}) + G^*(-\bar{p}^*) - \langle -\bar{p}^*, \Lambda \bar{u} \rangle \geq 0$$

da cui segue l'uguaglianza cercata. Infine le (2.40) sono conseguenza delle (2.39) e della proposizione 2.24. \square

Capitolo 3

Γ -convergenza

Questo capitolo vuole essere una breve introduzione alla teoria della Γ -convergenza. In tutta la sezione X sarà uno spazio metrico munito di distanza d .

3.1 Definizioni preliminari

Indichiamo con $\mathcal{N}(x)$ la classe degli intorni del punto x . La seguente definizione introduce una nozione leggermente diversa di limite inferiore e superiore in un punto x rispetto a quella usuale, in cui si tiene conto anche del valore della funzione nel punto.

Definizione 3.1. Sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Il *limite inferiore* di f in x_0 è

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) := \sup_{N \in \mathcal{N}(x_0)} \inf_{x \in N} f(x) \quad (3.1)$$

Il *limite superiore* di f in x_0 è invece

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) := \inf_{N \in \mathcal{N}(x_0)} \sup_{x \in N} f(x) \quad (3.2)$$

Osservazione 3.2. In base alla definizione qui data si ha sempre che $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$ e analogamente che $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$.

Osservazione 3.3. Se U e V sono intorni del punto x_0 tali che $U \subseteq V$, allora $\inf_U f \geq \inf_V f$. La mappa $U \rightarrow \inf_U f$ è decrescente e dunque l'estremo superiore in (3.1) diventa un limite su un sistema fondamentale di intorni di x_0 , ad esempio sulle palle di centro x_0 e raggio $1/n$.

3.1. Definizioni preliminari

Osservazione 3.4. La definizione si estende facilmente al caso di una funzione f definita su un sottoinsieme Y di X , restringendosi ai punti di Y , purché per ogni intorno N di x_0 si abbia $Y \cap N \neq \emptyset$. In particolare, prendendo $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ e $Y = \mathbb{N}$, si ritrova l'usuale limite inferiore e superiore di una successione. Viceversa

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) : x_n \rightarrow x_0 \right\}$$

Osservazione 3.5. Valgono ancora le usuali relazioni

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \geq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) + \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Osservazione 3.6. Ricordiamo che f è continua nel punto x_0 se e soltanto se

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

e in tal caso il comune valore è $f(x_0)$.

Osservazione 3.7. Alla luce della definizione 3.1, una funzione $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ è semicontinua inferiormente in un punto x_0 se

$$f(x_0) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

(abbiamo un'uguaglianza invece di una disuguaglianza).

Definizione 3.8 (Regolarizzata semicontinua inferiormente). Sia X uno spazio metrico e sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. La *regolarizzata semicontinua inferiormente* di f è l'estremo superiore delle funzioni semicontinue inferiormente minori o uguali a f . Indichiamo tale funzione con \overline{f} .

Lemma 3.9. *Sia X uno spazio metrico e sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Allora*

$$\overline{f}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y) \tag{3.3}$$

Dimostrazione. La conclusione del lemma segue immediatamente se dimostriamo che la funzione g definita dal secondo membro della (3.3) è semicontinua inferiormente e puntualmente minore o uguale a f . Infatti poiché \overline{f} è l'estremo superiore delle funzioni semicontinue inferiormente minori o

3.2. Definizione di Γ -convergenza

uguali a f si ha $g \leq \bar{f}$. D'altra parte $\bar{f}(y) \leq f(y)$ e poiché \bar{f} è semicontinua inferiormente si ha

$$\bar{f}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} \bar{f}(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} f(y) = g(x)$$

Per vedere che g è semicontinua inferiormente basta mostrare che l'insieme $g^\alpha = \{x \in X : g(x) > \alpha\}$ è aperto. Preso $x \in g^\alpha$ si avrà per un opportuno $r > 0$ che $\inf_{y \in B_r(x)} f(y) > \alpha$. Preso allora $x' \in B_r(x)$ e $r' > 0$ in modo che $B_{r'}(x') \subseteq B_r(x)$, si avrà $\inf_{y \in B_{r'}(x')} f(y) > \alpha$ e quindi $\liminf_{y \rightarrow x'} f(y) > \alpha$. \square

3.2 Definizione di Γ -convergenza

Definizione 3.10 (Γ -convergenza). Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su X a valori in $\bar{\mathbf{R}}$. Diciamo che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge a $f : X \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ se

1. per ogni x in X e per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \quad (3.4)$$

2. per ogni x in X esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x tale che

$$f(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \quad (3.5)$$

La funzione f è detta Γ -limite della successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e si scrive $f = \Gamma\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$. Una successione per cui vale (3.5) è detta *recovery sequence*.

Osservazione 3.11. La disuguaglianza in (3.4) può essere riscritta come

$$f(x) \leq \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\}$$

Inoltre, si ha pure

$$\inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\} \leq \inf \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\}$$

Se $\{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una recovery sequence allora

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(\bar{x}_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(\bar{x}_n) \leq f(x)$$

3.2. Definizione di Γ -convergenza

quindi

$$f(x) = \min \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\} = \min \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\} \quad (3.6)$$

(notare che il minimo è realizzato proprio dalla recovery sequence). L'espressione appena trovata è molto importante. Per prima cosa, ci dice che se il Γ -limite esiste, è anche unico. Inoltre, si può dimostrare che l'esistenza del Γ -limite è equivalente all'uguaglianza degli estremi inferiori nella (3.6), cioè se

$$\inf \{ \liminf_n f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \} = \inf \{ \limsup_n f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \}$$

allora il Γ -limite esiste e

$$\begin{aligned} \left(\Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) (x) &= \inf \{ \liminf_n f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \} = \\ &= \inf \{ \limsup_n f_n(x_n) : x_n \rightarrow x \} \end{aligned}$$

La (3.5) si può scrivere in molti modi equivalenti, come si vede dal seguente lemma.

Lemma 3.12. *Se vale la (3.4), le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *Esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x tale che*

$$f(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$$

2. *Esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x tale che*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$$

3. *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x tale che*

$$f(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) - \varepsilon$$

Dimostrazione.

1 \Rightarrow 2 Se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una recovery sequence, abbiamo anche grazie alla (3.4)

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq f(x)$$

da cui $\lim_n f_n(x_n) = f(x)$.

3.2. Definizione di Γ -convergenza

2 \Rightarrow 3 Segue immediatamente dalla definizione di limite superiore.

3 \Rightarrow 1 Preso $\varepsilon_k = 1/k$, si può trovare una successione $\{x_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n^k) \leq f(x) + \frac{1}{k}$$

Grazie anche al fatto che $x_n^k \rightarrow x$ si può trovare un intero N_k tale che

$$f_n(x_n^k) \leq f(x) + \frac{1}{k}, \quad d(x_n^k, x) \leq 1/k$$

per $n \geq N_k$. Possiamo supporre che $N_k < N_{k+1}$. La successione definita da

$$x_n = \begin{cases} x_n^1 & \text{se } n < N_2 \\ x_n^k & \text{se } N_k \leq n < N_{k+1} \end{cases}$$

converge a x e siccome per essa vale definitivamente che $f_n(x_n) \leq f(x) + 1/k$ si trova $\limsup_n f_n(x_n) \leq f(x) + 1/k$ e per l'arbitrarietà di k quanto si voleva dimostrare. \square

Ora alcuni esempi.

Esempio 3.13. Supponiamo che $\Gamma\text{-lim}_n f_n = f$ e $g : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ sia una funzione continua. Allora $\Gamma\text{-lim}_n (f_n + g) = f + g$. Ciò segue immediatamente dal fatto che se $x_n \rightarrow x$ allora

$$f(x) + g(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n(x_n) + g(x_n))$$

e se $x_n \rightarrow x$ è una recovery sequence per la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ allora

$$f(x) + g(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (f_n(x_n) + g(x_n))$$

Esempio 3.14. Consideriamo la successione definita da $f_n = f$. Allora il Γ -limite è dato da \overline{f} . Infatti data una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x per definizione di limite inferiore

$$\overline{f}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

Ancora per definizione di limite inferiore si può trovare una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x e tale che

$$\overline{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

In particolare si noti che se f non è semicontinua inferiormente allora esisterà un x tale che $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) < f(x)$. Quindi il Γ -limite di una successione costante non coincide necessariamente con il termine della successione.

3.3. Convergenza dei minimi

Esempio 3.15. Supponiamo che lo spazio X sia munito della metrica discreta. In questo caso la Γ -convergenza si riduce alla convergenza puntuale. Ricordiamo che se $x_n \rightarrow x$ allora $x_n = x$ definitivamente. Quindi se il Γ -limite esiste, presa una recovery sequence $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x si avrà

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq f(x)$$

quindi $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Viceversa, se esiste il limite punto per punto, allora valgono entrambe le condizioni della definizione (3.10).

Esempio 3.16. Se f_n converge uniformemente a una funzione continua f , allora f è il Γ -limite di f_n . Infatti se $x_n \rightarrow x$ abbiamo, grazie alla continuità di f e alla convergenza uniforme delle f_n ,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon$$

Quindi vale la prima condizione della definizione (3.10). Facilmente si vede che la successione costante $x_n = x$ è una recovery sequence.

3.3 Convergenza dei minimi

L'importanza della Γ -convergenza segue dal fatto che se una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni Γ -converge a una funzione f allora una ogni punto limite di una successione di minimi per $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un minimo per f .

Proposizione 3.17. *Siano $f_n, f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ delle applicazioni. Valgono i seguenti fatti:*

1. *se il punto 1 della definizione 3.10 è verificato, allora*

$$\inf_K f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_K f_n$$

per ogni sottoinsieme compatto K di X

2. *se il punto 2 della definizione 3.10 è verificato, allora*

$$\inf_U f \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_U f_n$$

per ogni sottoinsieme aperto U di X .

3.3. Convergenza dei minimi

Dimostrazione.

1. Sia $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che $\tilde{x}_n \in K$ e $\liminf_j \inf_K f_j = \liminf_j f_j(\tilde{x}_j)$. Esiste una sottosuccessione $\{\tilde{x}_{n_k}\}$ tale che $\tilde{x}_{n_k} \rightarrow \bar{x} \in K$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(\tilde{x}_{n_k}) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(\tilde{x}_{n_k})$$

Poniamo allora

$$x_n = \begin{cases} \tilde{x}_{n_k} & \text{se } n = n_k \\ \bar{x} & \text{se } n \neq n_k \text{ per ogni } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \inf_K f &\leq f(\bar{x}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \leq \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_{n_k}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_K f_n \end{aligned}$$

che è la prima affermazione.

2. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $x \in U$ tale che $f(x) \leq \inf_U f + \varepsilon$. Allora, presa la recovery sequence per x , abbiamo

$$\inf_U f + \varepsilon \geq f(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_U f_n$$

La seconda affermazione segue allora dall'arbitrarietà di ε . \square

Definizione 3.18. Una funzione $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ si dice *coerciva* se per ogni reale t l'insieme $\{f \leq t\}$ è relativamente compatto. Si dice invece *debolmente coerciva* se esiste un sottoinsieme compatto non vuoto K di X tale che $\inf_X f = \inf_K f$. Una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice *equi-debolmente coerciva* se esiste un sottoinsieme compatto non vuoto K di X tale che $\inf_X f_n = \inf_K f_n$.

Osservazione 3.19. È chiaro che una funzione coerciva è anche debolmente coerciva. Infatti se f è identicamente $+\infty$ possiamo scegliere un qualsiasi compatto. Se invece f non è identicamente $+\infty$ allora per un opportuno t l'insieme $\{f \leq t\}$ è non vuoto. Si può allora prendere $K = \overline{\{f \leq t\}}$.

Il seguente teorema contiene l'enunciato sui minimi annunciato all'inizio della sezione.

3.3. Convergenza dei minimi

Teorema 3.20. *Consideriamo una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni equi-debolmente coercive definite su uno spazio metrico X . Sia inoltre $f = \Gamma\text{-lim}_n f_n$. Allora f assume un valore minimo e*

$$\min_X f = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_X f_n$$

Inoltre, se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione relativamente compatta tale che $\lim_n f_n(x_n) = \lim_n \inf_X f_n$, allora ogni punto limite di $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un minimo di f .

Dimostrazione. Siccome la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è relativamente compatta, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a un punto \bar{x} . Se K è il compatto della definizione di equi-debole coercività e $U = X$ abbiamo

$$\begin{aligned} \inf_X f &\leq \inf_K f \leq f(\bar{x}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_K f_n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_X f_n \leq \limsup_{n \in \mathbb{N}} \inf_X f_n \leq \inf_X f \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Capitolo 4

Teoria generale del trasporto ottimale

In questo capitolo richiameremo alcuni risultati generali sul problema del trasporto di Monge e la generalizzazione introdotta da Kantorovich.

4.1 Primi risultati

Il problema del trasporto ottimale nella sua prima formulazione, quella di Monge, può essere espresso in questo modo.

Notazione. Ricordiamo che data $t : X \rightarrow Y$ misurabile e $\mu \in \mathcal{M}(X)$, indichiamo con $t_{\#}\mu$ la misura su Y definita da $t_{\#}\mu(B) = \mu(t^{-1}(B))$ per ogni B boreliano di Y .

Problema 4.1 (Problema di Monge). Siano μ e ν due misure positive finite definite sui boreliani di \mathbf{R}^N . Posto

$$\mathcal{T}(\mu, \nu) := \{t : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N : t_{\#}\mu = \nu\}$$

(gli elementi di $\mathcal{T}(\mu, \nu)$ sono detti *trasporti ammissibili*), trovare

$$\inf_{t \in \mathcal{T}(\mu, \nu)} \int_{\mathbf{R}^N} |x - t(x)| \, d\mu \tag{4.1}$$

e, se esiste, un t minimizzante.

Si può già introdurre una forma più generale del problema 4.1. Invece di \mathbf{R}^N possiamo considerare due spazi metrici X e Y e sostituire alla funzione

4.1. Primi risultati

$x \mapsto |x - t(x)|$ la funzione $x \mapsto c(x, t(x))$ dove

$$c : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$$

(detta *funzione costo*) è boreliana e limitata dal basso.

Questo problema può non avere soluzione, ad esempio perché la classe dei trasporti è vuota. Ciò si verifica quando le misure μ e ν hanno massa differente. Infatti si vede facilmente che μ e $t_{\#}\mu$ hanno la stessa massa, quindi nessuna mappa t può essere un trasporto. L'uguaglianza delle masse però è solo necessaria come si vede dal seguente esempio.

Esempio 4.2. Sia $X = Y = [0, 1]$, $\mu = \delta_0$, $\nu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. Anche in questo caso la classe $\mathcal{T}(\mu, \nu)$ è vuota perché la misura $t_{\#}\delta_0$ è concentrata nel punto $t(0)$.

Senza perdita di generalità possiamo supporre che μ e ν siano misure di probabilità e che la funzione costo c sia positiva.

Kantorovich ha introdotto la seguente formulazione rilassata del problema di Monge.

Problema 4.3 (Problema di Monge-Kantorovich). Siano X e Y spazi metrici, μ e ν due misure di probabilità definite sui boreliani di X e Y rispettivamente, $c : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione boreliana e positiva. Posto

$$\mathcal{P}(\mu, \nu) := \{\lambda \in \mathcal{M}_1(X \times Y) : \pi_{X\#}\lambda = \mu, \pi_{Y\#}\lambda = \nu\}$$

(gli elementi di $\mathcal{P}(\mu, \nu)$ sono detti *piani di trasporto* o *misure ammissibili*), trovare

$$\inf_{\lambda \in \mathcal{P}(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) \, d\lambda \quad (4.2)$$

e, se esiste, una misura μ minimizzante.

Nella formulazione di Kantorovich l'insieme dei piani di trasporto non è mai vuoto: la misura $\lambda = \mu \times \nu$ è ammissibile, cioè è un piano di trasporto. Notiamo che se t è un trasporto, la misura $\lambda = (Id \times t)_{\#}\mu$ è un piano di trasporto e, poiché si ha

$$\int_X c(x, t(x)) \, d\mu = \int_{X \times Y} c(x, y) \, d\lambda$$

nella formulazione di Kantorovich l'estremo inferiore che compare in (4.2) si effettua su un insieme più grande. Un problema è vedere quando i due estremi

inferiori coincidono e quando oltre all'esistenza di un piano di trasporto λ è assicurata anche l'esistenza di un trasporto. Per quanto riguarda il primo di questi si vede bene che non ha sempre soluzione. Infatti, prendendo μ e ν come nell'esempio 4.2, siccome non ci sono trasporti, l'estremo inferiore è $+\infty$; d'altra parte, poiché si ha almeno un piano di trasporto, l'estremo inferiore fatto sulle misure ammissibili è finito. In effetti la mancanza dell'uguaglianza fra i due estremi inferiori è proprio dovuta alla presenza di atomi nella misura iniziale, come si vede da seguente teorema (che non dimostriamo, ma che si può trovare in [1]).

Teorema 4.4. *Sia X uno spazio metrico compatto. Sia c una funzione reale non negativa semicontinua inferiormente su $X \times X$. Supponiamo che μ non abbia atomi. Allora l'estremo inferiore sui trasporti (4.1) coincide con l'estremo inferiore fatto sui piani di trasporto (4.2).*

La semicontinuità inferiore di c assicura l'esistenza di un piano di trasporto ottimale, quindi l'estremo inferiore in (4.2) è di fatto un minimo. Abbiamo bisogno del seguente lemma.

Lemma 4.5. *Ogni funzione reale f semicontinua inferiormente e limitata dal basso su uno spazio metrico (X, d) è limite puntuale di una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ crescente di funzioni continue. Inoltre, se f è positiva, le f_n possono essere prese positive.*

Dimostrazione. Poniamo

$$f_n(x) = \inf\{f(y) + nd(x, y) : y \in X\}$$

La famiglia al variare di y di funzioni $x \mapsto f(y) + nd(x, y)$ hanno costante di Lipschitz minore o uguale a n , quindi f_n ha costante di Lipschitz minore o uguale a n . Fissiamo un punto $x \in X$ e scegliamo x_n in modo che

$$f(x_n) + nd(x, x_n) < f_n(x) + 2^{-n} \quad (4.3)$$

Siccome f è limitata inferiormente e la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente e soddisfa $f_n(x) \leq f(x)$ si ha $d(x, x_n) \leq M/n$, quindi $x_n \rightarrow x$. Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq f(x)$$

Passando al limite, tenuto conto della semicontinuità di f , si ottiene

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

È chiaro inoltre che se $f \geq 0$, allora $f_n \geq 0$. □

4.1. Primi risultati

Teorema 4.6 (Esistenza di un piano di trasporto ottimale). *Supponiamo che X e Y siano compatti e $c : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ sia semicontinua inferiormente e positiva. Allora il problema 4.3 ammette soluzione.*

Dimostrazione. Consideriamo una successione minimizzante $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Poiché le misure λ_n sono di probabilità, la successione $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è limitata nello spazio di Banach $\mathcal{C}(X \times Y)^* = \mathcal{M}(X \times Y)$ e, a meno di sottosuccessioni, si può supporre che $\lambda_n \rightharpoonup^* \lambda$ per una opportuna misura $\lambda \in \mathcal{M}(X \times Y)$. Il limite λ è un piano di trasporto: poiché le misure λ_n sono ammissibili

$$\int_{X \times Y} f \circ \pi_{X\#} d\lambda_n = \int_X f d\mu$$

$$\int_{X \times Y} g \circ \pi_{Y\#} d\lambda_n = \int_Y g d\nu$$

per ogni f e g continue su X e Y rispettivamente. Poiché $\lambda_n \rightharpoonup^* \lambda$

$$\int_{X \times Y} f \circ \pi_{X\#} d\lambda = \int_X f d(\pi_{X\#}\lambda) = \int_X f d\mu$$

$$\int_{X \times Y} g \circ \pi_{Y\#} d\lambda = \int_Y g d(\pi_{Y\#}\lambda) = \int_Y g d\nu$$

Infine grazie al fatto che la topologia debole* separa i punti segue che $\pi_{X\#}\lambda = \mu$ e $\pi_{Y\#}\lambda = \nu$.

Non resta da dimostrare che il funzionale

$$\lambda \mapsto \int_{X \times Y} c(x, y) d\lambda$$

è sequenzialmente semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole*. Supponiamo dapprima che il costo c sia continuo. La semicontinuità inferiore segue semplicemente dalla definizione di topologia debole* (e in questo caso il funzionale è addirittura continuo). Nel caso di un generico costo c semicontinuo inferiormente e positivo basta usare il lemma 4.5. Se $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è una successione di costi continui e positivi tale che $c_n \nearrow c$ puntualmente, il funzionale si scrive come estremo superiore di funzionali continui:

$$\int_{X \times Y} c(x, y) d\lambda = \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_{X \times Y} c_n(x, y) d\lambda$$

ed è quindi sequenzialmente semicontinuo inferiormente. \square

4.2 Regolarità della misura ottimale

Il concetto di monotonia ciclica rispetto a un costo c è stato introdotto da Gangbo e McCann in [18]. Da questo scaturiscono risultati molto potenti, come l'esistenza del potenziale massimale di Kantorovich.

Definizione 4.7 (Monotonia ciclica). Sia c una funzione positiva e semi-continua inferiormente e Γ un sottoinsieme di $X \times X$. Γ è detto c -ciclicamente monotono se

$$\sum_{i=1}^n c(x_{i+1}, y_i) \geq \sum_{i=1}^n c(x_i, y_i) \quad (4.4)$$

per ogni $n \geq 2$ e $(x_i, y_i) \in \Gamma$ con $i = 1, \dots, n$. Naturalmente abbiamo posto $x_{n+1} = x_1$.

Una condizione equivalente alla c -ciclica monotonia è la seguente

$$\sum_{i=1}^n c(x_{\sigma(i)}, y_i) \geq \sum_{i=1}^n c(x_i, y_i) \quad (4.5)$$

per ogni $n \geq 2$, per ogni permutazione σ dell'insieme $\{1, \dots, n\}$ e per $(x_i, y_i) \in \Gamma$ con $i = 1, \dots, n$.

Teorema 4.8 (Regolarità dei piani di trasporto ottimali). *Supponiamo che c sia continua e reale. Allora per ogni misura ottimale γ il supporto $\text{spt } \gamma$ è c -ciclicamente monotono. Inoltre l'unione dei supporti dei piani di trasporto ottimali è c -ciclicamente monotono.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano un intero $n \geq 2$ e punti $(x_i, y_i) \in \text{spt } \gamma$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ tali che

$$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n (c(x_{i+1}, y_i) - c(x_i, y_i)) < 0$$

Per $i \in \{1, \dots, n\}$ prendiamo intorno U_i, V_i di x_i e y_i rispettivamente tali che $\gamma(U_i \times V_i) > 0$ e $f((u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)) < 0$. Poniamo ora $\lambda = \min\{\gamma(U_i \times V_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$. Indichiamo con γ_i la misura su $U_i \times V_i$ di massa 1 che coincide a meno di costante moltiplicativa con γ . Sia Y uno spazio compatto, σ una misura di probabilità su Y e $\eta_i = u_i \times v_i : Y \rightarrow U_i \times V_i$ una funzione boreliana tale che $\gamma_i = \eta_{i\#} \sigma$ per $i \in \{1, \dots, n\}$ (basta prendere

4.2. Regolarità della misura ottimale

come Y il prodotto degli spazi $U_i \times V_i$ in modo che le η_i siano le proiezioni). Definiamo

$$\gamma' = \gamma + \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n ((u_{i+1} \times v_i)_{\#} \sigma - (u_i \times v_i)_{\#} \sigma)$$

Siccome $\lambda \eta_{i\#} \sigma = \lambda \gamma_i \leq \gamma$, otteniamo $\gamma' \in \mathcal{M}_+(X \times X)$. Inoltre γ' è una misura ammissibile in quanto si verifica che $\pi_{\#}^+ \gamma' = \mu^+$ e $\pi_{\#}^- \gamma' = \mu^-$. Quindi

$$I(\gamma') - I(\gamma) = \frac{\lambda}{n} \int_Y \sum_{i=1}^n (c(u_{i+1}, v_i) - c(u_i, v_i)) d\sigma < 0$$

Per dimostrare la seconda asserzione, ricordiamo che l'insieme dei piani di trasporto è convesso, come pure quello dei piani di trasporto ottimali. Se (x_i, y_i) per $i \in \{1, \dots, n\}$ sono punti nell'unione dei supporti delle misure ottimali, per ogni i prendiamo un piano di trasporto γ_i tale che $(x_i, y_i) \in \gamma_i$. Allora la misura $1/n(\gamma_1 + \dots + \gamma_n)$ è un piano di trasporto ottimale il cui supporto contiene i punti (x_i, y_i) per $i \in \{1, \dots, n\}$. Applicando quanto dimostrato precedentemente si ottiene la seconda asserzione. \square

Il concetto di concavità e superdifferenziale introdotti nel capitolo 2 si generalizzano. La definizione che daremo ora si riconduce a quelle date non appena si sceglie come costo la distanza euclidea.

Definizione 4.9 (c -concavità). Una funzione $u : X \rightarrow \mathbf{R}$ se è l'estremo inferiore di una famiglia di funzioni $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ del tipo

$$u_i(x) = c(x, y_i) + t_i \tag{4.6}$$

per opportuni $y_i \in X$ e $t_i \in \mathbf{R}$.

Osservazione 4.10 (Caso lineare). Se il costo c è una funzione simmetrica delle variabili x e y che soddisfa la disuguaglianza triangolare, allora la nozione di c -concavità non è altro che la nozione di 1-lipschitzianità rispetto alla semi-distanza definita da c . Infatti se u è c -concava, dati x e y prendiamo una successione $\{i_n\}$ in modo che $u_{i_n}(x) \searrow u(x)$ e $u_{i_n}(y) \searrow u(y)$. Allora

$$|u_{i_n}(x) - u_{i_n}(y)| \leq c(x, y)$$

Passando al limite, si ottiene la 1-lipschitzianità di u . Viceversa, se u è 1-lipschitziana rispetto alla metrica definita da c si trova che

$$u(x) = \inf\{c(x, y) + u(y) : y \in X\}$$

4.2. Regolarità della misura ottimale

Osservazione 4.11 (Caso quadratico). Nel caso del costo quadratico dato da $c(x, y) = 1/2|x - y|^2$ una funzione u è c -concava se e soltanto se $u - |x|^2/2$ è concava. Infatti da

$$u(x) = \inf\{c(x, y_i) + t_i : i \in I\}$$

segue che

$$u(x) - \frac{1}{2}|x|^2 = \inf_{i \in I} \langle x, -y_i \rangle + \frac{1}{2}|y_i|^2 + t_i$$

cioè la concavità di u . Viceversa, se $v = u - |x|^2/2$ è concava, allora

$$v(x) = \inf_{y, p \in \partial^+ v(y)} \{v(y) + \langle p, x - y \rangle\}$$

da cui

$$u(x) = \inf_{y, -p \in \partial^+ v(y)} \left\{ \frac{1}{2}|p - x|^2 + c(p, y) \right\}$$

Definizione 4.12 (c -superdifferenziale). Sia $u : X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione. Il c -superdifferenziale di u in x è l'insieme

$$\partial_c u(x) := \{y : u(z) \leq u(x) + c(z, y) - c(x, y) \text{ per ogni } z \in X\} \quad (4.7)$$

Il teorema seguente è una estensione di un classico teorema dovuto a Rockafellar.

Teorema 4.13. *Ogni insieme c -ciclicamente monotono Γ è contenuto nel grafico del c -superdifferenziale di una funzione c -concava. Viceversa, il grafico del c -superdifferenziale di una funzione c -concava è c -ciclicamente monotono.*

Dimostrazione. Fissiamo arbitrariamente $(x_0, y_0) \in \Gamma$ e definiamo

$$u(x) := \inf\{c(x, y_n) - c(x_n, y_n) + \dots + c(x_1, y_0) - c(x_0, y_0)\}$$

dove l'estremo inferiore è fatto al variare di $(x_i, y_i) \in \Gamma$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ e $n \geq 1$. La funzione u così costruita è c -concava e per la c -ciclica monotonia di Γ si ottiene $u(x_0) = 0$. Tutto sta nel dimostrare che vale la disuguaglianza

$$u(x) \leq u(x') + c(x, y') - c(x', y') \quad (4.8)$$

per ogni $x \in X$ e $(x', y') \in \Gamma$. Infatti da questa, ponendo $x = x_0$, si trova $u(x') > -\infty$ e $y' \in \partial_c u(x')$.

4.2. Regolarità della misura ottimale

Vediamo ora la dimostrazione della (4.8). Fissato $\lambda > u(x')$, siano $(x_i, y_i) \in \Gamma$ per $i \in \{1, \dots, n\}$ tali che

$$c(x', y_n) - c(x_n, y_n) + \dots + c(x, y_0) - c(x_0, y_0) < \lambda$$

Allora, ponendo $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x', y')$, otteniamo

$$\begin{aligned} u(x) &\leq c(x, y_{n+1}) - c(x_{n+1}, y_{n+1}) + c(x_{n+1}, y_n) - c(x_n, y_n) + \dots + \\ &\quad + c(x_1, y_0) - c(x_0, y_0) \leq c(x, y') - c(x', y') + \lambda \end{aligned}$$

e si conclude per l'arbitrarietà di λ .

Per dimostrare l'ultima asserzione, sia v una funzione c -concava, $y_i \in \partial_c v(x_i)$ per $i \in \{1, \dots, n\}$ e σ una permutazione dell'insieme $\{1, \dots, n\}$. Allora

$$v(x_{\sigma(i)}) - v(x_i) \leq c(x_{\sigma(i)}, y_i) - c(x_i, y_i)$$

Allora sommando sulla variabile i si ottiene la relazione che definisce la c -ciclica monotonia (4.5). \square

La teoria fin qui sviluppata permette di dimostrare un utile risultato. Ricordiamo che nel caso che il costo c sia simmetrico, continuo e verifichi la disuguaglianza triangolare, la nozione di c -concavità non è altro che quella di 1-lipschitzianità rispetto alla distanza indotta da c .

Corollario 4.14. *Supponiamo che la funzione costo c sia simmetrica rispetto alle variabili x e y , continua, verifichi la disuguaglianza triangolare e $c(x, x) = 0$ per ogni x in X . Un piano di trasporto γ per la coppia di misure μ e ν è ottimale se e soltanto se esiste $u : X \rightarrow \mathbf{R}$ tale che*

$$|u(x) - u(y)| \leq c(x, y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in X \times X \quad (4.9)$$

$$u(x) - u(y) = c(x, y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \text{spt } \gamma \quad (4.10)$$

Inoltre, esiste una funzione u che soddisfa la (4.9) e la (4.10) per ogni piano di trasporto ottimale. Una tale funzione verrà detta un potenziale di Kantorovich massimale.

Dimostrazione. Per prima cosa vediamo che la (4.9) e la (4.10) implicano che γ è ottimale. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \int_{X \times X} c(x, y) \, d\gamma' &\geq \int_{X \times X} u(x) - u(y) \, d\gamma' = \int_X u \, d\mu - \int_X u \, d\nu = \\ &= \int_{X \times X} u(x) - u(y) \, d\gamma = \int_{X \times X} c(x, y) \, d\gamma \end{aligned}$$

4.3. Esistenza del trasporto nel caso unidimensionale

La prima disuguaglianza è dovuta alla (4.9), mentre l'ultima uguaglianza è dovuta alla (4.10).

Viceversa, se Γ è la chiusura dell'unione dei supporti delle misure ottimali, allora Γ è c -ciclicamente monotono. Allora esiste una funzione c -concava u tale che $\Gamma \subseteq \partial_c u$. La (4.9) non è altro che la definizione di c -concavità applicata a u . Dal fatto che $\Gamma \subseteq \partial_c u$ segue invece che

$$u(y) - u(x) \leq c(y, y) - c(x, y) = -c(x, y)$$

per ogni (x, y) nel supporto della misura ottimale $\gamma (\subseteq \Gamma)$. Da quest'ultima, unitamente al fatto che $u(x) - u(y) \leq c(x, y)$ segue la (4.10). \square

Vale anche il seguente corollario come conseguenza di ciò che abbiamo appena dimostrato.

Corollario 4.15. *Supponiamo che la funzione costo c sia simmetrica rispetto alle variabili x e y , continua, verifichi la disuguaglianza triangolare e $c(x, x) = 0$ per ogni x in X . Allora*

$$\min \left\{ \int_{X \times X} c(x, y) \, d\gamma : \gamma \in \mathcal{P}(\mu, \nu) \right\} = \max \left\{ \int_X u \, d(\mu - \nu) : u \in \text{Lip}_1(X, c) \right\}$$

Dimostrazione. Poiché u è 1-lipschitziana rispetto alla metrica definita da c , abbiamo che $u(x) - u(y) \leq c(x, y)$. Da questa segue che

$$\int_X u \, d(\mu - \nu) = \int_X u \, d\mu - \int_X u \, d\nu = \int_{X \times X} u(x) - u(y) \, d\gamma \leq \int_{X \times X} c(x, y) \, d\gamma$$

Se γ è un piano di trasporto ottimale e u è la funzione del corollario (4.14) allora

$$\begin{aligned} \int_X u \, d(\mu - \nu) &= \int_X u \, d\mu - \int_X u \, d\nu = \int_{X \times X} u(x) - u(y) \, d\gamma = \\ &= \int_{\text{spt } \gamma} u(x) - u(y) \, d\gamma = \int_{\text{spt } \gamma} c(x, y) \, d\gamma = \int_{X \times X} c(x, y) \, d\gamma \quad \square \end{aligned}$$

4.3 Esistenza del trasporto nel caso unidimensionale

Come è già stato già accennato, non sempre l'estremo inferiore in (4.1) coincide con l'estremo inferiore (anzi minimo) in (4.2), anche se nell'ipotesi che

4.3. Esistenza del trasporto nel caso unidimensionale

μ non abbia atomi si trova che i due estremi inferiori sono uguali. Resta però il problema di trovare sotto quali condizioni anche l'estremo inferiore in (4.1) è minimo, cioè trovare un trasporto ottimale (nel senso di Monge). La risposta non è banale ed è stata trovata soltanto nel 1976 da Sudakov in [24] nel caso che il costo sia la distanza euclidea. La dimostrazione di Sudakov fa uso della teoria della probabilità. Recentemente sono apparsi vari lavori che affrontano il problema con diversi approcci. Uno di questi è stato proposto da Evans e Gangbo in [16] ed è basato sulle PDE, specificatamente sullo studio dell'equazione

$$-\operatorname{div}(|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p) = f^+ - f^-$$

nel limite per $p \rightarrow \infty$. Evans e Gangbo considerano però solo il caso in cui su misure μ e ν sono date da due funzioni lipschitziane f^+ e f^- facendo alcune ipotesi ulteriori fra cui quella che $\operatorname{spt} f^+$ e $\operatorname{spt} f^-$ siano disgiunti. Un altro possibile approccio al problema si trova nell'articolo di Caffarelli, Feldman e McCann [11] in cui si considerano misure date da densità L^1 e costi strettamente convessi. Un punto di vista analogo si trova nel lavoro di Trudinger e Wang in [25]. Infine in [17] Feldman e McCann dimostrano che nel caso del costo euclideo e di misure date da densità L^1 vi è un'unica mappa ottimale t che soddisfa la condizione di monotonia

$$\frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} + \frac{t(x_1) - t(x_2)}{\|t(x_1) - t(x_2)\|} \neq 0$$

per tutte le coppie (x_1, x_2) tali che $x_1 \neq x_2$ e $t(x_1) \neq t(x_2)$.

In questa sezione studieremo il caso dell'esistenza di un trasporto ottimale nel caso che lo spazio X sia un intervallo chiuso di \mathbf{R} e il costo sia la potenza p -esima della distanza euclidea, $c(x, y) = |x - y|^p$.

Teorema 4.16. *Supponiamo che μ sia priva di atomi. Allora*

1. *Esiste unica (a meno di insiemi numerabili) una funzione non decrescente $\psi : \operatorname{spt} \mu \rightarrow X$ tale che $\psi_{\#} \mu = \nu$*
2. *La funzione ψ realizza il minimo in (4.1) e, se $p > 1$, è l'unica mappa ottimale*

Questo teorema è veramente ottimale. Infatti, come nell'esempio 4.2, non necessariamente ci sono delle mappe ammissibili se μ ha atomi. Inoltre, ci possono essere più di una mappa ottimale nel caso $p = 1$, come si vede dal seguente esempio.

4.3. Esistenza del trasporto nel caso unidimensionale

Esempio 4.17. Sia $n \geq 1$ un intero, $\mu = I_{[0,n]} \mathcal{L}^1$, $\nu = I_{[1,n+1]} \mathcal{L}^1$ e $c(x, y) = |x - y|$. Per il corollario 4.15, prendendo come funzione $u(t) = t$ si trova che il costo del trasporto è almeno n . D'altra parte prendendo come mappa $\psi(t) = t + 1$ si trova che

$$\int_X |x - t(x)| \, d\mu = n$$

Inoltre ψ è ammissibile e quindi è un trasporto ottimale. Però nel caso che $n > 1$ si ha un'altra mappa ottimale quella definita da

$$\psi(t) = \begin{cases} t + n & t \in [0, 1] \\ t & t \in [1, n] \end{cases}$$

Dimostrazione del teorema 4.16. Sia $m = \min I$. Definiamo

$$\psi(s) := \sup\{t \in I : \nu([m, t]) \leq \mu([m, s])\}$$

La funzione ψ è non decrescente. Inoltre, $\text{spt } \nu \subseteq \overline{\psi(I)}$ e se $\psi(s)$ non è un atomo di ν , allora $\nu([m, \psi(s)]) = \mu([m, s])$.

Ricordiamo che l'insieme degli atomi di ν è al più numerabile, perché è l'insieme dei punti di discontinuità della funzione di ripartizione di ν che è crescente. Sia T l'unione dell'insieme degli atomi di ν e dei t tali che $\psi^{-1}(\{t\})$ è costituito da più di un punto. Allora ψ^{-1} è ben definita su $\psi(I) \setminus T$ e $\psi^{-1}([t, t']) = [\psi^{-1}(t), \psi^{-1}(t')]$ se $t, t' \in \psi(I) \setminus T$ e $t < t'$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \nu([t, t']) &= \nu([m, t']) - \nu([m, t]) = \mu([m, \psi^{-1}(t')]) - \mu([m, \psi^{-1}(t)]) = \\ &= \mu([\psi^{-1}(t), \psi^{-1}(t')]) = \mu(\psi^{-1}([t, t'])) \end{aligned}$$

Poiché $\text{spt } \nu \subseteq \overline{\psi(I)}$, gli intervalli chiusi con estremi in $\psi(I) \setminus T$ generano i boreliani di $\text{spt } \nu$, quindi $\psi_{\#} \mu = \nu$.

Sia ϕ una funzione non decrescente tale che $\phi_{\#} \mu = \nu$. Possiamo supporre che ϕ sia continua a destra (basta modificarla su un insieme al più numerabile). Definiamo

$$S = \{s \in \text{spt } \mu : (s, s') \cap \text{spt } \mu = \emptyset \text{ per qualche } s' > s\}$$

Notiamo che S è al più numerabile. Vogliamo vedere che su $\text{spt } \mu \setminus S$ abbiamo che $\phi \geq \psi$. Ciò segue facendo tendere $s' \searrow s$ nella disuguaglianza

$$\nu([m, \phi(s')]) = \mu(\phi^{-1}([m, \phi(s')])) \geq \mu([m, s']) > \mu([m, s])$$

4.4. La densità di trasporto

che si ottiene se $s \in \text{spt } \mu \setminus S$ e $s' > s$. Inoltre,

$$\int_I \phi - \psi \, d\mu = \int_I \phi \, d\mu - \int_I \psi \, d\mu = \int_I 1 \, d\nu - \int_I 1 \, d\nu = 0$$

quindi $\phi(s) = \psi(s)$ per μ -quasi-ogni s , da cui $\phi(s) = \psi(s)$ in ogni punto di continuità di $s \in \text{spt } \mu$ di ϕ e ψ .

Ora dimostriamo che se $p > 1$ la mappa ψ che abbiamo costruito è l'unica soluzione del problema di Monge 4.1. Consideriamo un piano di trasporto ottimale γ . Poiché il supporto di γ è ciclicamente monotono, abbiamo

$$|x - y'|^p + |x' - y|^p \geq |x - y|^p + |x' - y'|^p$$

per ogni coppia di punti $(x, y), (x', y') \in \text{spt } \gamma$. Poiché $p > 1$ (ma tralasciamo i calcoli), si trova che $x < x'$ implica $y \leq y'$. Allora l'insieme

$$P := \{x \in \text{spt } \mu : \text{card}(\{y : (x, y) \in \text{spt } \gamma\}) > 1\}$$

è al più numerabile. Per ogni μ -quasi-ogni x in I esiste un unico $y = \tilde{\psi}(x) \in I$ tale che $(x, y) \in \text{spt } \gamma$ (l'esistenza di almeno un y segue dal fatto che la proiezione di $\text{spt } \gamma$ è $\text{spt } \mu$). Notiamo che $\tilde{\psi}$ è non decrescente nel suo dominio. Abbiamo che

$$\gamma = (Id \times \tilde{\psi})_{\#} \mu$$

In particolare

$$\nu = \pi_{\#}^+ \gamma = \pi_{\#}^+ ((Id \times \tilde{\psi})_{\#} \mu) = \tilde{\psi}_{\#} \mu$$

da cui, poiché $\tilde{\psi}$ è non decrescente, segue che $\tilde{\psi} = \psi$ su $\text{spt } \mu$ a meno di un insieme numerabile. \square

4.4 La densità di trasporto

Nel capitolo 5 studieremo i problemi di ottimizzazione di forma. Brevemente, saremo interessati a massimizzare la quantità

$$\mathcal{E}(\mu) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \, d\mu - \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) \right\}$$

4.4. La densità di trasporto

al variare la misura μ . Per i teoremi 5.12 e 5.13 da una misura che massimizza la quantità sopra si può trovare una soluzione delle equazioni di Monge-Kantorovich

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla_{\mu} w) = f \\ |\nabla_{\mu} w| = 1 \quad \mu\text{-quasi-ovunque} \\ w \in \operatorname{Lip}_1(\mathbf{R}^N) \end{cases} \quad (4.11)$$

e viceversa.

L'equazione (4.11) però si ritrova in molti altri contesti. Ad esempio nell'articolo di Evans e Gangbo [16]. Nelle ipotesi che le misure μ e ν siano date da due densità f^+ e f^- non negative, lipschitziane tali che

- $\operatorname{spt} f^+ \cap \operatorname{spt} f^- = \emptyset$
- $f^+ > 0$ su $(\operatorname{spt} f^+)^0$, $f^- > 0$ su $(\operatorname{spt} f^-)^0$
- $\partial(\operatorname{spt} f^+)$ e $\partial(\operatorname{spt} f^-)$ siano regolari

Evans e Gangbo dimostrano che, detta u_p la soluzione della PDE

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p) = f^+ - f^- & \text{su } B(0, R) \\ u_p = 0 & \text{su } \partial B(0, R) \end{cases}$$

dove R è scelto in modo tale valga una certa stima uniforme, si può trovare una successione $p_k \rightarrow \infty$ tale che

$$\begin{cases} u_{p_k} \rightarrow u & \text{uniformemente} \\ \nabla u_{p_k} \rightharpoonup^* \nabla u & \text{in } L^\infty(B(0, R^N)) \end{cases}$$

con $u \in C^{0,1}(B(0, R))$ nulla sul bordo di $B(0, R)$. Inoltre u soddisfa $|\nabla u| \leq 1$ quasi-ovunque ed è caratterizzata dall'esistenza di una funzione $a \in L^\infty(B(0, R))$ tale che $a \geq 0$ quasi-ovunque e

$$-\operatorname{div}(a \nabla u) = f \quad \text{su } B(0, R)$$

Si è quindi dimostrato che se le misure μ e ν sono date da densità lipschitziane allora la densità di trasporto è L^∞ .

In [1] e in [17] invece è stato dimostrato che se le misure μ e ν sono date da due densità f^+ e f^- appartenenti a L^1 allora la densità di trasporto è anch'essa data da una densità L^1 .

Più recentemente De Pascale e Pratelli [13] hanno dimostrato che la dimensione di Hausdorff della densità di trasporto μ è maggiore o uguale al massimo fra le dimensioni dei marginali f^+ e f^- e 1. Inoltre hanno provato che

4.4. La densità di trasporto

- Se almeno una delle misure f^+ o f^- è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, allora la densità μ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.
- Se $f^+ \in L^q$, allora $\mu \in L^p$ per $p < (2N)' \wedge (1 + (q - 1)/2)$.
- Se $f^+, f^- \in L^q$, allora $\mu \in L^p$ per $1 \leq p < q$.

Capitolo 5

Problemi di ottimizzazione di forma

Lo scopo di questo capitolo è descrivere alcuni risultati collegati con la teoria del trasporto ottimale. Descriveremo come con la teoria del trasporto ottimale si possono risolvere i problemi di *ottimizzazione di forma* (vedi [7],[8], [6] e anche [15]).

5.1 Introduzione

Saremo interessati ai due problemi seguenti. Il primo è scalare, mentre il secondo è una generalizzazione del primo al caso vettoriale.

Il primo di questi permette di studiare un modello di conduzione del calore stazionario. La misura f rappresenta in questo modello la densità di calore della sorgente. La misura invece μ rappresenta la densità di conduttività. L'energia associata a una distribuzione di temperatura $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ è data da

$$E(\mu, u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \, d\mu - \langle f, u \rangle$$

Il problema consiste nel massimizzare al variare di μ la quantità

$$\mathcal{E}(\mu) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \, d\mu - \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) \right\}$$

Riassumendo e precisando:

Problema 5.1 (Caso scalare). Sia $j : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

5.1. Introduzione

1. j è convessa
2. j è positivamente p -omogenea per qualche reale $p > 1$
3. esistono due costanti positive α_1 e α_2 tali che

$$\alpha_1 |z|^p \leq j(z) \leq \alpha_2 |z|^p$$

per ogni $z \in \mathbf{R}^N$

Sia \mathcal{U} un cono convesso di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ assegnato. \mathcal{U} sarà detto insieme degli *spostamenti ammissibili*. Un sottoinsieme chiuso K di \mathbf{R}^N fissato sarà chiamato *design region*. Posto

$$\mathcal{E}(\mu) := \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} j(\nabla u) \, d\mu - \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{U} \right\} \quad (5.1)$$

dove $f \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N)$, risolvere il problema

$$\max \{ \mathcal{E}(\mu) : \mu \text{ non negativa, } \mu(\mathbf{R}^N) = m, \text{ spt } \mu \subseteq K \} \quad (5.2)$$

dove m è un reale positivo assegnato.

Il secondo problema è collegato allo studio dei problemi di elasticità. Qui f rappresenta la densità di forza elastica. Il lavoro totale di questa forza per uno spostamento $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ è

$$\int u \, df = \langle f, u \rangle$$

L'energia associata a uno spostamento $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ è

$$E(\mu, u) = \int_{\mathbf{R}^N} j(\nabla u) \, d\mu - \langle f, u \rangle$$

dove j sarà una funzione convessa soddisfacente alcune ulteriori proprietà. Nelle applicazioni nel caso di un materiale omogeneo, isotropo e linearmente elastico avremo, ad esempio,

$$j(z) = \beta |z^{sym}|^2 + \frac{\alpha}{2} |\text{tr}(z^{sym})|^2$$

dove α e β sono dette *costanti di Lamé*. Saremo interessati al problema di minimizzare al variare di μ nelle misure aventi supporto in un dato chiuso la quantità

$$\mathcal{E}(\mu) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} j(\nabla u) \, d\mu - \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{U} \right\}$$

dove \mathcal{U} è un cono convesso di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$.

Riassumendo:

Problema 5.2 (Caso vettoriale). Sia $j : \mathbf{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

1. j è convessa
2. j è positivamente p -omogenea per qualche reale $p > 1$
3. $j(z^{sym}) = j(z)$, dove $z^{sym} = \frac{1}{2}(z + z^t)$ è la parte simmetrica di z
4. esistono due costanti positive α_1 e α_2 tali che

$$\alpha_1 |z^{sym}|^p \leq j(z) \leq \alpha_2 |z^{sym}|^p$$

per ogni $z \in \mathbf{R}^{N \times N}$

Sia \mathcal{U} un cono convesso di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$ assegnato. \mathcal{U} sarà detto insieme degli *spostamenti ammissibili*. Un sottoinsieme chiuso K di \mathbf{R}^N fissato sarà chiamato *design region*. Posto

$$\mathcal{E}(\mu) := \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} j(\nabla u) \, d\mu - \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{U} \right\} \quad (5.3)$$

dove $f \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$, risolvere il problema

$$\max \{ \mathcal{E}(\mu) : \mu \text{ non negativa, } \mu(\mathbf{R}^N) = m, \text{spt } \mu \subseteq K \} \quad (5.4)$$

dove m è un reale positivo assegnato.

Osserviamo che in entrambi i casi si può avere che $\mathcal{E}(\mu) = -\infty$. Questo può avvenire ad esempio quando $\mu = \mathcal{L}^1$ e $f = \delta_0$. In tal caso abbiamo

$$E(\mu, u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} |u'|^2 \, dx - u(0)$$

e prendendo una successione di funzioni regolari con supporto in $[-n^2, n^2]$ e che assumono il valore n in 0 si trova che $\mathcal{E}(\mu) = -\infty$.

5.2 Il caso scalare

5.2.1 L'equazione di Monge-Kantorovich

Cominciamo con un lemma che seguirà da alcuni principi di dualità.

5.2. Il caso scalare

Lemma 5.3. *Abbiamo*

$$\mathcal{E}(\mu) = \max \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\sigma|^2 \, d\mu : \sigma \in L^2(\mu), -\operatorname{div}(\sigma\mu) = f \right\}$$

Dimostrazione. Usando la notazione della sezione 2.4 poniamo

$$V = \mathcal{D}(\mathbf{R}^N), \quad Y = L^2_\mu(\mathbf{R}^N)$$

Inoltre definiamo

$$F(u) = -\langle f, u \rangle, \quad G(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |v|^2 \, d\mu, \quad \Lambda u = \nabla u$$

Per prima cosa calcoliamo l'operatore aggiunto di Λ , $\Lambda^* : L^2_\mu \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$. Ricordiamo che la dualità fra $L^2_\mu(\mathbf{R}^N)$ e $(L^2_\mu(\mathbf{R}^N))^* = L^2_\mu(\mathbf{R}^N)$ è data da $\langle u, v \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} u \cdot v \, d\mu$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \Lambda^* v, u \rangle &= \langle v, \Lambda u \rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} v \cdot \nabla u \, d\mu \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \left(v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + v_N \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^N \left\langle \mu, v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^N \left\langle v_i \mu, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \mu), u \right\rangle = \left\langle - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \mu), u \right\rangle \\ &= \langle -\operatorname{div}(v\mu), u \rangle \end{aligned}$$

Troviamo allora che

$$\Lambda^* v = -\operatorname{div}(v\mu)$$

Inoltre

$$F^*(u^*) = \sup \{ \langle u^*, u \rangle + \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) \} = \begin{cases} 0 & \text{se } u^* + f = 0 \\ +\infty & \text{se } u^* + f \neq 0 \end{cases}$$

e, come nell'esempio 2.21,

$$G^*(v^*) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |v^*|^2 \, d\mu$$

Applicando il teorema 2.42 si trova allora che il problema

$$\mathcal{E}(\mu) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \, d\mu - \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) \right\}$$

è stabile. Grazie ancora al teorema 2.42 abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mu) &= \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \, d\mu - \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) \right\} = \\ &= \max \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\sigma|^2 \, d\mu : \sigma \in L^2(\mu), f - \operatorname{div}(\sigma\mu) = 0 \right\} = \\ &= \max \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\sigma|^2 \, d\mu : \sigma \in L^2(\mu), f + \operatorname{div}(\sigma\mu) = 0 \right\} \end{aligned}$$

che dimostra la tesi. \square

Lemma 5.4. *Definiamo*

$$I(f) := \min \{ -\langle f, \phi \rangle : \phi \in \operatorname{Lip}_1(\mathbf{R}^N) \} \quad (5.5)$$

Allora vale la seguente disuguaglianza per l'energia $\mathcal{E}(\mu)$

$$\mathcal{E}(\mu) \leq -\frac{1}{2m} |I(f)|^2 \quad (5.6)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che per l'esempio 2.21 si ha

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\sigma|^2 \, d\mu = \sup \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} \sigma \cdot \tau \, d\mu - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\tau|^2 \, d\mu : \tau \in L^2_\mu(\mathbf{R}^N) \right\}$$

Quindi in particolare si ha per ogni $\tau \in L^2_\mu(\mathbf{R}^N)$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\sigma|^2 \, d\mu \geq \int_{\mathbf{R}^N} \sigma \cdot \tau \, d\mu - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\tau|^2 \, d\mu$$

Fissiamo allora una funzione $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ tale che $|\nabla\phi| \leq 1$ e un reale $t \geq 0$. Sostituendo $\nabla(t\phi) = t\nabla\phi$ al posto di τ , otteniamo

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\sigma|^2 \, d\mu \geq t \int_{\mathbf{R}^N} \sigma \cdot \nabla\phi \, d\mu - \frac{1}{2} t^2 \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla\phi|^2 \, d\mu$$

Dalla condizione $\operatorname{div}(\sigma\mu) + f = 0$ ricaviamo

$$\langle f, \phi \rangle = -\langle \operatorname{div}(\sigma\mu), \phi \rangle = - \int_{\mathbf{R}^N} \operatorname{div}(\sigma\phi) \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^N} \sigma \cdot \nabla\phi \, d\mu$$

5.2. Il caso scalare

da cui

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\sigma|^2 \, d\mu \geq t \langle f, \phi \rangle - \frac{1}{2} t^2 \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla \phi|^2 \, d\mu$$

Poiché il secondo membro è massimo per

$$t = \frac{\langle f, \phi \rangle}{\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla \phi|^2 \, d\mu}$$

otteniamo

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\sigma|^2 \, d\mu \geq \frac{1}{2} \frac{\langle f, \phi \rangle^2}{\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla \phi|^2 \, d\mu} \geq \frac{1}{2m} |\langle f, \phi \rangle|^2$$

da cui la tesi. \square

Lemma 5.5. *Vale la seguente disuguaglianza:*

$$\begin{aligned} I(f) &= \min\{-\langle f, \phi \rangle : \phi \in \text{Lip}_1(\mathbf{R}^N)\} = \\ &= \max\left\{-\int_{\mathbf{R}^N} d|\mu| : \mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N), f + \text{div } \mu = 0\right\} \quad (5.7) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che per la densità dell'insieme

$$\{u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) : |\nabla u| \leq 1\}$$

in $\text{Lip}_1(\mathbf{R}^N)$ per la norma dell'estremo superiore abbiamo

$$\begin{aligned} \min\{-\langle f, \phi \rangle : \phi \in \text{Lip}_1(\mathbf{R}^N)\} &= \\ &= \min\{-\langle f, \phi \rangle : \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N), |\nabla \phi| \leq 1\} \end{aligned}$$

Usando la notazione della sezione 2.4 poniamo

$$V = \mathcal{D}(\mathbf{R}^N), \quad Y = \mathcal{C}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$$

Inoltre prendiamo

$$F(\phi) = -\langle f, \phi \rangle, \quad G(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\phi| \leq 1 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad \Lambda \phi = \nabla \phi$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} F^*(\mu) &= \sup\{\langle \mu, \phi \rangle - F(\phi) : \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)\} \\ &= \sup\{\langle \mu, \phi \rangle + \langle f, \phi \rangle : \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu + f = 0 \\ +\infty & \text{se } \mu + f \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} G^*(\mu) &= \sup\{\langle \mu, \phi \rangle - G(\phi) : \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)\} \\ &= \sup\{\langle \mu, \phi \rangle : \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N), |\phi| \leq 1\} = \int_{\mathbf{R}^N} d|\mu| \end{aligned}$$

Dobbiamo ancora calcolare l'aggiunto di Λ :

$$\begin{aligned} \langle \Lambda^* \mu, \phi \rangle &= \langle \mu, \nabla \phi \rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} d\mu_1 + \cdots + \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial \phi}{\partial x_N} d\mu_N \\ &= \langle \mu_1, \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \rangle + \cdots + \langle \mu_N, \frac{\partial \phi}{\partial x_N} \rangle \\ &= \langle -\frac{\partial \mu_1}{\partial x_1}, \phi \rangle + \cdots + \langle -\frac{\partial \mu_N}{\partial x_N}, \phi \rangle \\ &= \langle -\operatorname{div} \mu, \phi \rangle \end{aligned}$$

Quindi

$$\Lambda^* \mu = -\operatorname{div} \mu$$

Per il teorema 2.42 allora abbiamo analogamente al lemma precedente

$$\begin{aligned} I(f) &= \min\{-\langle f, \phi \rangle : \phi \in \operatorname{Lip}_1(\mathbf{R}^N)\} = \\ &= \max\left\{-\int_{\mathbf{R}^N} d|\mu| : \mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N), -\operatorname{div} \mu + f = 0\right\} = \\ &= \max\left\{-\int_{\mathbf{R}^N} d|\mu| : \mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N), \operatorname{div} \mu + f = 0\right\} \end{aligned}$$

che è la tesi. \square

Quella che stiamo per introdurre è la nozione di spazio tangente a una misura. Questa nozione si può trovare in forma simile in [7] e nella forma che qui presentiamo in [8]. Sia μ una misura non negativa limitata su \mathbf{R}^N . Poniamo

$$X_\mu := \{\psi \in L^2_\mu(\mathbf{R}^N) : \operatorname{div}(\psi\mu) \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N)\}$$

X_μ è uno spazio vettoriale. Inoltre per ogni ψ in X_μ possiamo definire una multifunzione da \mathbf{R}^N a valori nei sottoinsiemi chiusi e convessi di \mathbf{R}^N nel seguente modo associando a x il singoletto $\{\psi(x)\}$. Alcuni fatti generali sull'estremo superiore essenziale di multifunzioni sono trattati nell'appendice B. Altrimenti si può consultare [21] o [26].

5.2. Il caso scalare

Definizione 5.6 (Spazio tangente a una misura). Lo spazio tangente T_μ alla misura μ è l'estremo superiore essenziale delle multifunzioni appena definite al variare di ψ in X_μ . $T_\mu(x)$ è detto *spazio tangente* alla misura μ in x .

Osservazione 5.7. Ricordiamo che

$$\psi \in X_\mu \iff \left| \int_{\mathbf{R}^N} \psi \nabla \phi \, d\mu \right| \leq M \|\phi\|_\infty \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$$

Per la proposizione B.12 segue che

- $\psi \in X_\mu \Rightarrow \psi(x) \in T_\mu(x)$ per μ -quasi-ogni $x \in \mathbf{R}^N$
- Se Γ è una multifunzione tale che

$$\psi \in X_\mu \Rightarrow \psi(x) \in \Gamma(x) \quad \text{per } \mu\text{-quasi-ogni } x \in \mathbf{R}^N$$

allora $T_\mu(x) \subseteq \Gamma(x)$ a meno di insiemi di misura nulla.

- $T_\mu(x)$ è un sottospazio vettoriale (chiuso) di \mathbf{R}^N

Per la proposizione B.11 invece si può trovare una successione $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in X_μ tale che

$$T_\mu(x) = \overline{\{\psi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}}$$

Elenchiamo qui di seguito ulteriori proprietà del piano tangente a una misura:

- Se U è un aperto e $\mu \llcorner U = \nu \llcorner U$ allora $T_\mu(x) = T_\nu(x)$ quasi ovunque su U rispetto a μ (o a ν).
- Se ν è assolutamente continua rispetto a μ , allora $T_\nu(x) \subseteq T_\mu(x)$ per ν -quasi-ogni x . In particolare, se $\nu = \lambda\mu$ con $\lambda > 0$, allora $T_\nu(x) = T_\mu(x)$ per μ -quasi-ogni x .

La nozione di spazio tangente a una misura in un dato punto x ci permette di definire il *differenziale tangenziale* di una funzione u di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$.

Definizione 5.8. Sia $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$. Sia $P_\mu(x, \cdot)$ il proiettore su $T_\mu(x)$. Allora

$$\nabla_\mu u(x) = P_\mu(x, \nabla u(x)) \tag{5.8}$$

è detto *differenziale tangenziale* di u nel punto x .

Lemma 5.9 (Formula di integrazione per parti). *Siano u e ψ elementi di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ e X_μ rispettivamente. Allora vale la seguente formula di integrazione per parti:*

$$\int_{\mathbf{R}^N} \nabla_\mu u \cdot \psi \, d\mu = \langle -\operatorname{div}(\psi\mu), u \rangle \quad (5.9)$$

Dimostrazione. Poiché ψ appartiene a X_μ , $\psi(x) \in T_\mu(x)$ per μ -quasi-ogni x . Quindi

$$\int_{\mathbf{R}^N} \nabla_\mu u \cdot \psi \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^N} \nabla u \cdot \psi \, d\mu$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} \nabla_\mu u \cdot \psi \, d\mu &= \int_{\mathbf{R}^N} \nabla u \cdot \psi \, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^N \left\langle \mu, \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi_i \mu), u \right\rangle \\ &= - \langle \operatorname{div}(\psi\mu), u \rangle \end{aligned}$$

che è la formula di integrazione per parti cercata. \square

Ora vogliamo studiare alcune delle proprietà dell'operatore non limitato da L_μ^2 in $L_\mu^2(\mathbf{R}^N)$ il cui dominio è $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$.

Lemma 5.10. *Sia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ e v un elemento di $L_\mu^2(\mathbf{R}^N)$. Supponiamo che*

$$u_n \rightarrow 0 \text{ uniformemente}$$

$$\nabla_\mu u_n \rightharpoonup v \text{ per la topologia debole di } L_\mu^2(\mathbf{R}^N)$$

Allora $v(x) = 0$ per μ -quasi-ogni x .

Dimostrazione. Grazie alla formula di integrazione per parti (5.9) abbiamo se $\sigma \in X_\mu$

$$\int_{\mathbf{R}^N} \xi \cdot \sigma \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^N} \nabla_\mu(u_n) \cdot \sigma \, d\mu = - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, \operatorname{div}(\sigma\mu) \rangle = 0$$

5.2. Il caso scalare

L'ultima uguaglianza è dovuta all'ipotesi che μ sia una misura limitata e che la convergenza di u_n sia uniforme. Per il lemma 4.3 di [9] abbiamo

$$0 = \sup_{\sigma \in X_\mu} \int_{\mathbf{R}^N} \xi \cdot \sigma = \int_{\mathbf{R}^N} \mu\text{-ess sup}_{\sigma \in X_\mu} (\xi \cdot \sigma) \, d\mu$$

Per i teoremi B.11 e B.12 si può trovare una successione σ_n in X_μ tale che

$$\mu\text{-ess sup}_{\sigma \in X_\mu} (\xi \cdot \sigma)(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\xi \cdot \sigma_n)(x)$$

e

$$T_\mu(x) = \overline{\{\sigma_n(x) : n \in \mathbb{N}\}}$$

Si ottiene allora che

$$0 = \int_{\mathbf{R}^N} \sup_{n \in \mathbb{N}} (\xi \cdot \sigma_n) \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^N} \sup_{z \in T_\mu(x)} (v \cdot z) \, d\mu$$

da cui che

$$v(x) \in (T_\mu(x))^\perp$$

per μ -quasi-ogni x . D'altra parte per definizione $v(x) \in T_\mu(x)$, quindi $v(x) = 0$ per μ -quasi-ogni x . \square

Grazie a questo lemma, si può definire lo spazio $\mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ come la più piccola estensione chiusa di ∇_μ come operatore da $\mathcal{C}(\mathbf{R}^N)$ a L_μ^2 ponendo:

$$w = \nabla_\mu u \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists u_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) : u_n \rightarrow u \text{ uniformemente, } \nabla_\mu u_n \rightarrow w \text{ in } L_\mu^2(\mathbf{R}^N)$$

La norma di un elemento di $\mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}(\mathbf{R}^N)$ è data da

$$\|u\|_{\mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}(\mathbf{R}^N)} = \|u\|_{\mathcal{C}(\mathbf{R}^N)} + \|D_\mu(u)\|_{L_\mu^2(\mathbf{R}^N)}$$

In questo spazio possiamo rappresentare $\mathcal{E}(\mu)$ come

$$\mathcal{E}(\mu) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla_\mu u|^2 \, d\mu - \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}(\mathbf{R}^N) \right\}$$

e, seguendo [7],

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla_\mu u|^2 \, d\mu = \\ & = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^2 : u_n \rightarrow u \text{ uniformemente, } u_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) \right\} \end{aligned}$$

per ogni $u \in \mathcal{D}_{0,\mu}^{1,2}$. L'estremo inferiore è invece $+\infty$ altrimenti.

Teorema 5.11. *Sia f una misura con segno su \mathbf{R}^N tale che $f(\mathbf{R}^N) = 0$. Allora si può trovare una misura μ non negativa e limitata e una funzione $w \in \text{Lip}_1(\mathbf{R}^N)$ che soddisfano*

$$\begin{cases} -\text{div}(\mu \nabla_\mu w) = f \\ |\nabla_\mu w| = 1 \quad \mu\text{-quasi-ovunque} \\ w \in \text{Lip}_1(\mathbf{R}^N) \end{cases} \quad (5.10)$$

dette equazioni di Monge-Kantorovich.

Dimostrazione. Sia $w \in \text{Lip}_1(\mathbf{R}^N)$ tale che

$$-\langle f, w \rangle = \min\{-\langle f, \phi \rangle : \phi \in \text{Lip}_1(\mathbf{R}^N)\}$$

e sia $\nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N)$ una misura tale che $-\text{div} \nu = f$ e

$$-\int_{\mathbf{R}^N} d|\nu| = \max \left\{ -\int_{\mathbf{R}^N} d|\mu| : \mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N), f + \text{div} \mu = 0 \right\}$$

Poiché w e ν sono soluzioni di un problema e del suo duale, per la proposizione 2.43, abbiamo

$$-\int_{\mathbf{R}^N} d|\nu| = -\langle f, w \rangle \quad (5.11)$$

Poniamo $\mu = |\nu|$. Allora per una opportuna $\theta : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ con $|\theta(x)| = 1$ per μ -quasi-ogni x . Abbiamo che

$$\text{div}(\theta\mu) = \text{div} \nu = -f$$

quindi, poiché f è una misura, θ è un elemento di X_μ . Per la formula di integrazione per parti dimostrata nel lemma 5.9 e per la (5.11)

$$\int_{\mathbf{R}^N} \theta \cdot \nabla_\mu w \, d\mu = \langle f, w \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} d\mu$$

Poiché w è 1-lipschitziana, $|\nabla_\mu w(x)| \leq 1$ per μ -quasi-ogni x si ottiene che $\theta = \nabla_\mu w$. Da ciò segue che

$$f = -\text{div} \nu = -\text{div}(\theta\mu) = -\text{div}(\mu \nabla_\mu w)$$

$$|\nabla_\mu w| = |\theta| = 1 \quad \mu\text{-quasi-ovunque}$$

che, insieme al fatto che $w \in \text{Lip}_1(\mathbf{R}^N)$ per come è stata scelta, dimostra la (5.10). \square

5.2. Il caso scalare

Ecco ora il risultato di ottimizzazione di forma.

Teorema 5.12. *Il problema 5.1 ha una soluzione μ_0 . Inoltre, per la misura ottimale μ_0 vale che*

$$\mathcal{E}(\mu_0) = -\frac{1}{2m}|I(f)|^2$$

Dimostrazione. Sia ancora $w \in \text{Lip}_1(\mathbf{R}^N)$ tale che

$$-\langle f, w \rangle = \min\{-\langle f, \phi \rangle : \phi \in \text{Lip}_1(\mathbf{R}^N)\}$$

e $\nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N)$ una misura che soddisfa $-\text{div } \nu = f$ e

$$-\int_{\mathbf{R}^N} d|\nu| = \max \left\{ -\int_{\mathbf{R}^N} d|\mu| : \mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N), f + \text{div } \mu = 0 \right\}$$

Allora poniamo

$$\mu_0 = \frac{m}{|I(f)|}\mu, \quad u_0 = \frac{|I(f)|}{m}w$$

Poniamo $\sigma_0 = \nabla_{\mu_0} u_0$. Abbiamo allora

$$-\text{div}(\sigma_0 \mu_0) = -\text{div}(\mu_0 \nabla_{\mu_0} u_0) = -\text{div}(\mu \nabla_{\mu} w) = f$$

Allora abbiamo

$$\mathcal{E}(\mu_0) \geq -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\sigma_0|^2 d\mu = -\frac{1}{2} \langle u_0, f \rangle = -\frac{1}{2m}|I(f)|^2$$

Per il lemma 5.4 segue allora che

$$\mathcal{E}(\mu_0) = -\frac{1}{2m}|I(f)|^2$$

da cui la misura μ_0 è la soluzione del problema di shape optimization 5.1. \square

Il ragionamento per teorema precedente può essere invertito.

Teorema 5.13. *Siano μ e w soluzioni della equazione di Monge-Kantorovich*

$$\begin{cases} -\text{div}(\mu \nabla_{\mu} w) = f \\ |\nabla_{\mu} w| = 1 \quad \mu\text{-quasi-ovunque} \\ w \in \text{Lip}_1(\mathbf{R}^N) \end{cases}$$

Allora la misura $\mu_0 = m/|I(f)|\mu$ è soluzione del problema di shape optimization 5.1.

Dimostrazione. Ponendo $\nu = \mu \nabla_\mu w$, per la formula di integrazione per parti 5.9 con $u = w, \psi = \nabla_\mu w$ si ottiene:

$$\int_{\mathbf{R}^N} d\mu = \int_{\mathbf{R}^N} \nabla_\mu w \cdot \nabla_\mu w \, d\mu = -\langle \operatorname{div}(\mu \nabla_\mu w), w \rangle = \langle f, w \rangle$$

È quindi soddisfatta la relazione di estremalità relativa al problema

$$\min\{-\langle f, \phi \rangle : \phi \in \operatorname{Lip}_1(\mathbf{R}^N)\}$$

e al suo duale

$$\max\left\{-\int_{\mathbf{R}^N} d|\mu| : \mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N), f + \operatorname{div} \mu = 0\right\}$$

e quindi, per la proposizione 2.43, w è soluzione del primo e μ del secondo.

Inoltre, la misura μ_0 definita da

$$\mu_0 = \frac{m}{|I(f)|} \mu$$

è soluzione del problema di shape optimization. Infatti, posto

$$\sigma = \frac{|I(f)|}{m} \nabla_\mu w$$

si ha che

$$-\operatorname{div}(\sigma \mu_0) = -\operatorname{div}\left(\frac{|I(f)|}{m} \nabla_\mu w \frac{m}{|I(f)|} \mu\right) = -\operatorname{div}(\mu \nabla_\mu w) = f$$

Infine abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mu_0) &\geq -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\sigma|^2 \, d\mu_0 = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} \left(\frac{|I(f)|}{m} \nabla_\mu w\right) \cdot \left(\frac{|I(f)|}{m} \nabla_\mu w\right) \, d\mu_0 = -\frac{1}{2m} |I(f)|^2 \end{aligned}$$

Per il lemma 5.4 si ha allora

$$\mathcal{E}(\mu_0) = -\frac{1}{2m} |I(f)|^2$$

che è quanto affermato. □

5.2. Il caso scalare

5.2.2 Il problema del trasporto ottimale

Siano λ_1 e λ_2 misure non negative finite su \mathbf{R}^N . Consideriamo il problema di trasporto ottimale associato alla distanza euclidea e alle due misure λ_1 e λ_2 :

$$T(\lambda_1, \lambda_2) := \min_{\mathcal{P}(\lambda_1, \lambda_2)} \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} |x - y| d\gamma : \gamma \in \mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2) \right\}$$

dove $\mathcal{P}(\lambda_1, \lambda_2)$ è la classe delle misure ammissibili:

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \lambda_2) = \left\{ \gamma \in \mathcal{M}^+(\mathbf{R}^N) : \pi_{\#}^+(\gamma) = \lambda_1, \pi_{\#}^-(\gamma) = \lambda_2 \right\}$$

La quantità $-I(f)$ è strettamente collegata con il costo del trasporto $T(\lambda_1, \lambda_2)$ quando $\lambda_1 - \lambda_2 = f$. Precisiamo quanto accennato con il seguente teorema.

Teorema 5.14. *Valgono i seguenti fatti:*

1. Se λ_1 e λ_2 sono misure ammissibili, posto $f = \lambda_1 - \lambda_2$, abbiamo

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2) = \Phi(f^+, f^-) = -I(f)$$

2. Sia $f \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N)$ e supponiamo che $\text{spt } f$ sia compatto. Se f è a media nulla, allora

$$-I(f) = \inf \{ \Phi(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_2 - \lambda_1 = f \} = \Phi(f^+, f^-)$$

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2$ sono misure positive finite su \mathbf{R}^N tali che $\lambda_1(\mathbf{R}^N) = \lambda_2(\mathbf{R}^N)$ e $\lambda'_1(\mathbf{R}^N) = \lambda'_2(\mathbf{R}^N)$ allora

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda'_1 - \lambda'_2 \implies \Phi(\lambda_1, \lambda_2) = \Phi(\lambda'_1, \lambda'_2)$$

Infatti, poiché $|x - y|$ è nulla sulla diagonale di $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, ad ogni piano di trasporto γ possiamo aggiungere la misura δ data da

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(x, x) d\nu_1 + \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(y, y) d\nu_2$$

dove $\nu_i = \lambda'_i - \lambda_i$ per $i = 1, 2$ in modo che il costo non cambi. Basta quindi prendere $\lambda_1 = f^+$ e $\lambda_2 = f^-$.

Per far provare la seconda uguaglianza di 1 e dimostrare 2 basta vedere che per ogni misura $f \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N)$ si ha

$$-I(f) = \inf \{ \Phi(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_2 - \lambda_1 = f \}$$

5.2. Il caso scalare

Consideriamo la funzione $F : \mathcal{C}(\mathbf{R}^N) \rightarrow]-\infty, \infty]$ definita da

$$F(\varphi) = \begin{cases} -\langle f, \varphi \rangle & \text{se } \varphi \in \text{Lip}_1(\mathbf{R}^N) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Consideriamo la perturbazione $\Phi : \mathcal{C}(\mathbf{R}^N) \times \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N) \rightarrow]-\infty, +\infty]$ di F data da

$$\Phi(\varphi, \psi) = \begin{cases} -\langle f, \varphi \rangle & \text{se } \varphi(y) - \varphi(x) \leq |x - y| - \psi(x, y) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcoliamo la coniugata di Φ nel punto $(0, \nu)$. Osserviamo innanzi tutto che fissata φ e posto $\lambda_1 = \pi_{\#}^+(\nu)$ e $\lambda_2 = \pi_{\#}^-(\nu)$ si ha

$$\begin{aligned} \sup_{\psi \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)} \left\{ \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \psi \, d\nu + \langle f, \varphi \rangle \right\} &= \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} |x - y| \, d\nu - \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\lambda_2 + \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\lambda_1 + \langle f, \varphi \rangle \quad (5.12) \end{aligned}$$

Infatti da un lato si ha $\psi(x, y) \leq |x - y| - \varphi(y) + \varphi(x)$ e quindi

$$\begin{aligned} \sup_{\psi \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)} \left\{ \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \psi \, d\nu + \langle f, \varphi \rangle \right\} &\leq \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^N} |x - y| \, d\nu - \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(y) \, d\nu + \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(x) \, d\nu + \langle f, \varphi \rangle \quad (5.13) \end{aligned}$$

Dall'altro scegliendo $\psi(x, y) = |x - y| - \varphi(y) + \varphi(x)$ si ottiene l'uguaglianza nella (5.13). Infine basta osservare che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \varphi \circ \pi^-(x, y) \, d\nu &= \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\lambda_2 \\ \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \varphi \circ \pi^+(x, y) \, d\nu &= \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \, d\lambda_1 \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore in φ si ottiene:

$$\Phi^*(0, \nu) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |x - y| \, d\nu & \text{se } \nu \geq 0 \text{ e } \lambda_2 - \lambda_1 = f \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $I(f) = -\infty$ poiché in generale $\mathcal{P}^* \leq \mathcal{P}$ si ha l'uguaglianza. Supponiamo al contrario che $I(f)$ sia finito. Se dimostriamo che il problema è stabile

5.2. Il caso scalare

otterremo

$$\begin{aligned} I(f) &= \inf F(\varphi) = \sup(-\Phi^*(0, \nu)) = \\ &= \max \left\{ - \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |x - y| \, d\nu : \nu \geq 0, \lambda_2 - \lambda_1 = f \right\} \end{aligned}$$

che è quanto volevamo provare. Resta da vedere che il problema è stabile, cioè che la funzione

$$h(\psi) = \inf \{ -\langle f, \varphi \rangle : \varphi(y) - \varphi(x) \leq |x - y| - \psi(x, y) \}$$

è finita in 0 (ma già lo supponiamo) e semicontinua inferiormente in 0. Sia ψ_n una successione convergente uniformemente a 0. Fissato un $\varepsilon > 0$ scegliamo una successione di funzioni ϕ_n tali che $\Phi(\varphi_n, \psi_n) - h(\psi_n) \leq \varepsilon$. Poiché f è a supporto compatto, possiamo sceglierle limitate fuori dal supporto di f . Sul supporto di f abbiamo

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq |x - y| + \|\psi_n\|$$

quindi, grazie al fatto che $\|\psi_n\| \rightarrow 0$, la successione $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è equilimitata e equicontinua. Per il teorema di Ascoli-Arzelà a meno di una sottosuccessione possiamo supporre che $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente a una certa φ . Per il limite φ vale chiaramente che $\varphi(y) - \varphi(x) \leq |x - y| - \psi(x, y)$. Allora per il lemma di Fatou

$$h(0) \leq -\langle f, \phi \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (-\langle f, \phi_n \rangle) \leq \liminf_{n \in \infty} h(\psi_n) + \varepsilon \quad \square$$

In realtà c'è di più. Dalla conoscenza della misura ottimale per il problema di Monge-Kantorovich si può ricostruire la soluzione del problema di ottimizzazione di forma. Osserviamo che se μ è soluzione del problema con massa pari a m , allora $\alpha\mu$ è soluzione del problema con massa pari a αm . Si può infatti dimostrare il seguente teorema.

Teorema 5.15. *Se γ è un piano di trasporto ottimale, allora la misura definita da*

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \left\{ \int_{[x,y]} \varphi \, d\mathcal{H}^1 \right\} \, d\gamma$$

è ottimale per il problema di shape optimization 5.1 con la condizione di normalizzazione $m = -I(f)$.

5.3 Generalizzazioni

In realtà quanto detto nella sezione 5.2 può essere generalizzato ulteriormente.

5.3.1 Il caso scalare

Supponiamo che $j(z) = \frac{1}{p}|z|^p$. Assumiamo che Ω sia un aperto connesso e limitato di \mathbf{R}^N . Procedendo secondo lo schema delineato nella sezione 5.3.3 si definisce

$$X_\mu^{p'}(\Omega, \mathbf{R}^N) = \{\sigma \in L_\mu^{p'}(\Omega, \mathbf{R}^N) : \operatorname{div}(\sigma\mu) \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N)\}$$

Il piano tangente è allora definito in modo analogo alla definizione 5.6 come unione essenziale della multifunzioni che a x associano il singoletto $\{\sigma(x)\}$. Notiamo che in questo caso $\rho(z) = \rho_0(z) = |z|$ quindi

$$\operatorname{Lip}_{1,\rho}(\Omega, \Sigma) = \overline{\{u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) : |\nabla u| \leq 1 \text{ su } \Sigma, u|_\Sigma = 0\}}^{\mathcal{C}(\bar{\Omega})}$$

Indicheremo questo spazio con $\operatorname{Lip}_1(\Omega, \Sigma)$.

In questo caso si ottiene una forma più generale delle equazioni di Monge-Kantorovich.

Teorema 5.16. *Se μ risolve il problema di shape optimization 5.2, σ è la soluzione di*

$$\min \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} |\sigma| \, d\mu : \sigma \in L_\mu^1(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N), \operatorname{spt}(f + \operatorname{div}(\sigma\mu)) \in \mathcal{U}^0 \right\}$$

e u realizza il massimo di

$$\sup\{\langle f, u \rangle : u \in \operatorname{Lip}_1(\Omega, \Sigma)\}$$

allora vale l'equazione di Monge-Kantorovich

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla_\mu(u)\mu) = f & \text{su } \mathbf{R}^N \setminus \Sigma \\ u \in \operatorname{Lip}_1(\Omega, \Sigma) \\ |\nabla_\mu(u)| = 1 & \mu\text{-quasi ovunque su } \mathbf{R}^N \\ \mu(\Sigma) = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

5.3. Generalizzazioni

5.3.2 Equivalenza con il problema del trasporto

Nel caso scalare la classe di funzioni $\text{Lip}_{1,\rho}(\Omega, \Sigma)$, che abbiamo già indicato con $\text{Lip}_1(\Omega, \Sigma)$ si può caratterizzare completamente con la semi-distanza

$$d_{\Omega, \Sigma} = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| : \varphi \in \text{Lip}(\mathbf{R}^N), |\nabla\varphi| \leq 1 \text{ su } \overline{\Omega}, \varphi = 0 \text{ su } \Sigma\}$$

La semi-distanza $d_{\Omega, \Sigma}$ gode di alcune proprietà:

Proposizione 5.17. *Per la semi-distanza $d_{\Omega, \Sigma}$ valgono i seguenti fatti:*

1. $d_{\Omega, \Sigma}(x, y) = |x - y|$ se esiste una palla B in Ω che non interseca Σ e che contiene x, y .
2. $d_{\Omega, \Sigma}(x, y) \leq C|x - y|$ per ogni $x, y \in \overline{\Omega}$ per una costante C opportuna.
3. Se Σ è vuoto, allora $d_{\Omega, \Sigma}$ è distanza geodetica su Ω definita da

$$\delta_{\Omega}(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 |\gamma'(t)| dt : \gamma \in \text{Lip}([0, 1], \overline{\Omega}), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}$$

4. Se Σ è non vuoto, allora

$$d_{\Omega, \Sigma}(x, y) = \inf \{ \delta_{\Omega}(x, y) \wedge (\delta_{\Omega}(x, \xi_1) + \delta_{\Omega}(y, \xi_2)) : \xi_1, \xi_2 \in \Sigma \}$$

In questo caso il problema di trasporto associato è quello dato da

$$T(\lambda_1, \lambda_2) := \min \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} d_{\Omega, \Sigma}(x, y) d\gamma : \gamma \in \mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2) \right\}$$

dove $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ è la classe delle misure ammissibili:

$$\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2) = \{ \gamma \in \mathcal{M}^+(\mathbf{R}^N) : \pi_{\#}^+(\gamma) = \lambda_1, \pi_{\#}^-(\gamma) = \lambda_2 \}$$

e il teorema 5.14 si generalizza. Vale infatti il seguente enunciato.

Teorema 5.18. *Siano λ_1, λ_2 due misure positive su $\overline{\Omega}$ di uguale massa. Chiamiamo f la differenza $\lambda_1 - \lambda_2$. Allora abbiamo*

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2) = \Phi(f^+, f^-) = I(f, \Sigma, \Omega)$$

Inoltre, se f è un elemento di $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$, indicando con c la media di f e con ν una qualsiasi misura di probabilità su Σ (nel caso che questo sia non vuoto), abbiamo

$$\begin{aligned} I(f, \Sigma, \Omega) &= \inf\{\Phi(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_2 - \lambda_1 = f \text{ su } \bar{\Omega} \setminus \Sigma\} \\ &= \begin{cases} \Phi(f^+, f^-) & \text{se } \Sigma = \emptyset \text{ e } c = 0 \\ +\infty & \text{se } \Sigma = \emptyset \text{ e } c \neq 0 \\ \Phi(f^+, f^- + c\nu) & \text{se } \Sigma \neq \emptyset \text{ e } c \geq 0 \\ \Phi(f^+ - c\nu, f^-) & \text{se } \Sigma \neq \emptyset \text{ e } c \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5.3.3 Il caso vettoriale

Per quanto riguarda l'equivalenza del problema di shape optimization e quello delle equazioni di Monge-Kantorovich lo schema della dimostrazione è lo stesso, anche se più tecnico. Ci limiteremo a enunciare i risultati che si ottengono.

Posto

$$\mathcal{C}(\mu) = -\mathcal{E}(\mu)$$

ancora con ragionamenti di analisi convessa si trova

$$\mathcal{C}(\mu) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} j^*(\sigma) \, d\mu : \sigma \in L^p_\mu(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^{N \times N}), f + \operatorname{div}(\sigma\mu) \in \mathcal{U}^0 \right\} \quad (5.15)$$

dove \mathcal{U}^0 è il cono di distribuzioni

$$\mathcal{U}^0 = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N) : \forall u \in \mathcal{U} \quad \langle T, u \rangle \leq 0\}$$

L'estremo inferiore è un minimo qualora $\mathcal{C}(\mu)$ sia finito.

Con un argomento del tutto simile a quello del lemma 5.4 dopo aver definito

$$I(f, \mathcal{U}, K) = \sup \{ \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{U}, j(\nabla u) \leq 1/p \text{ su } K \}$$

si prova la seguente proposizione. Indichiamo con ρ la funzione definita da

$$\rho(z) = \inf\{t > 0 : j(z/t) \leq 1/p\}$$

e con ρ_0 quella data da

$$\rho^0(z) = \{z : \xi : \rho(\xi) \leq 1\}$$

5.3. Generalizzazioni

Proposizione 5.19. *Sia μ una misura non negativa di massa m tale che $\text{spt } \mu \subseteq K$. Allora*

$$\mathcal{C}(\mu) \geq \frac{(I(f, \mathcal{U}, K))^{p'}}{p' m^{1/(p-1)}}$$

Con ragionamenti di dualità si ottiene

$$\begin{aligned} I(f, \mathcal{U}, K) &= \\ &= \inf \left\{ \int \rho^0(\lambda) : \lambda \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^{N \times N}), \text{spt } \lambda \subseteq K, f + \text{div } \lambda \in \mathcal{U}^0 \right\} \end{aligned}$$

Siccome si può provare che esiste una misura non negativa μ di massa m tale che $\text{spt } \mu \subseteq K$ per cui vale la disuguaglianza opposta

$$\mathcal{C}(\mu) \leq \frac{(I(f, \mathcal{U}, K))^{p'}}{p' m^{1/(p-1)}}$$

si ottiene il teorema

Teorema 5.20. *Valgono i seguenti fatti*

- *Il problema di ottimizzazione di forma 5.2 ha una soluzione μ e vale*

$$\mathcal{C}(\mu) = \frac{(I(f, \mathcal{U}, K))^{p'}}{p' m^{1/(p-1)}}$$

- *Data una soluzione μ del problema 5.2 si ha*

$$\begin{aligned} I(f, \mathcal{U}, K) &= \\ &= \min \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} \rho^0(\sigma) \, d\mu : \sigma \in L^1_{\mu}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^{N \times N}), f + \text{div}(\sigma\mu) \in \mathcal{U}^0 \right\} \end{aligned} \tag{5.16}$$

e per ogni σ ottimale vale la relazione

$$\rho^0(\sigma) = \frac{I(f, \mathcal{U}, K)}{m}$$

μ -quasi-ovunque.

- *Se λ è una soluzione del problema*

$$\inf \left\{ \int \rho^0(\lambda) : \lambda \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^{N \times N}), \text{spt } \lambda \subseteq K, f + \text{div } \lambda \in \mathcal{U}^0 \right\}$$

allora la misura $\mu = \frac{m}{I(f, \mathcal{U}, K)} \rho^0(\lambda)$ è soluzione del problema 5.2.

In questa parte supporremo che

- il chiuso K sia la chiusura di un aperto connesso e limitato Ω di \mathbf{R}^N
- $\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N) : u|_{\Sigma} = 0\}$ dove Σ è un chiuso di K

In tal caso si trova subito che $\mathcal{U}_0 = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N) : \text{spt } T \subseteq \Sigma\}$.

Il problema che ci interessa è

$$I(f, \mathcal{U}, K) = \sup \{ \langle f, u \rangle : u \in \mathcal{U}, j(\nabla u) \leq 1/p \text{ su } K \} \quad (5.17)$$

Poiché \mathcal{U} è determinato dal chiuso Σ fissato e K è la chiusura dell'aperto Ω , scriveremo $I(f, \Sigma, \Omega)$ in luogo di $I(f, \mathcal{U}, K)$. Dopo aver introdotto lo spazio

$$\text{Lip}_{1,\rho}(\Omega, \Sigma) = \overline{\{u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N) : \rho(\nabla u) \leq 1, u|_{\Sigma} = 0\}}^{\mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbf{R}^N)}$$

si definisce la formulazione rilassata del problema come

$$\sup \{ \langle f, u \rangle : u \in \text{Lip}_{1,\rho}(\Omega, \Sigma) \} \quad (5.18)$$

Chiamiamo \mathcal{R}_{Σ} l'insieme degli spostamenti rigidi nulli su Σ

$$\mathcal{R}_{\Sigma} = \{ \{x \mapsto u(x) = Ax + b\} : b \in \mathbf{R}^N, A \in \mathcal{A}(N \times N), u|_{\Sigma} = 0 \}$$

Abbiamo indicato con $\mathcal{A}(N \times N)$ l'insieme delle matrici antisimmetriche $N \times N$. Vale allora il seguente teorema.

Teorema 5.21. *L'estremo superiore in (5.17) è finito se e soltanto se*

$$\forall u \in \mathcal{R}_{\Sigma} \quad \langle f, u \rangle = 0$$

In tal caso il problema rilassato (5.18) ammette soluzione e

$$I(f, \mathcal{U}, K) = \max \{ \langle f, u \rangle : u \in \text{Lip}_{1,\rho}(\Omega, \Sigma) \}$$

Seguendo la stessa strada proposta per il caso scalare, si pone

$$X_{\mu}^{p'}(U, \mathcal{S}(N \times N)) = \{ \sigma \in L_{\mu}^{p'}(U, \mathcal{S}(N \times N)) : \text{div}(\sigma \mu) \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N) \}$$

dove $\mathcal{S}(N \times N)$ è l'insieme delle matrici simmetriche $N \times N$ e

$$M_{\mu}(x) = \mu\text{-ess} \bigcup \{ \sigma(x) : \sigma \in X_{\mu}^{p'}(U, \mathcal{S}(N \times N)) \}$$

Detto $P_{\mu}(x, \cdot)$ il proiettore su $M_{\mu}(x)$ la derivata tangenziale è data da $e_{\mu}(x, u) = P_{\mu} \nabla u(x)$.

5.3. Generalizzazioni

Lemma 5.22. *Sia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{D}(U, \mathbf{R}^N)$ tale che*

$$u_n \rightarrow 0 \text{ uniformemente su } U, \quad e_\mu(u_n) \rightarrow \xi \text{ in } L_\mu^p(U, \mathcal{S}(N \times N))$$

Allora $\xi = 0$.

Grazie a questo lemma e_μ si estende a un operatore chiuso da $\mathcal{C}(\bar{U}, \mathbf{R}^N)$ a $L_\mu^p(U, \mathcal{S}(N \times N))$ il cui dominio è lo spazio di Banach $\mathcal{D}_{0,\mu}^{1,p}(U)$ che è il completamento di $\mathcal{D}(U)$ per la norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}_{0,\mu}^{1,p}(U)} = \|u\|_{\mathcal{C}(\bar{U})} + \|e_\mu(u)\|_{L_\mu^p(U)}$$

In modo del tutto analogo a [7] si trova che la forma rilassata dell'energia

$$J(\mu, u) = \int_{\mathbf{R}^N} j(\nabla u) \, d\mu$$

è data da

$$\bar{J}(\mu, u) = \begin{cases} \int_U j_\mu(x, e_\mu(u)) \, d\mu & \text{se } u \in \mathcal{D}_{0,\mu}^{1,p}(U) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove

$$j_\mu(x, z) = \inf \{j(z + \xi) : \xi \in (M_\mu(x))^\perp\}$$

Il risultato principale di questa sezione è il seguente

Teorema 5.23. *Sia μ una soluzione del problema 5.2. Siano σ e u soluzioni dei problemi (5.16) e del problema rilassato (5.18). Allora μ, σ, u risolvono l'equazione di Monge-Kantorovich*

$$\begin{cases} f + \operatorname{div}(\sigma\mu) = 0 & \text{su } \mathbf{R}^N \setminus \Sigma \\ \sigma \in \partial j_\mu(x, e_\mu(u)) & \mu\text{-quasi-ovunque su } \mathbf{R}^N \\ u \in \operatorname{Lip}_{1,\rho}(\Omega, \Sigma) & \\ j_\mu(x, e_\mu(u)) = 1/p & \mu\text{-quasi-ovunque su } \mathbf{R}^N \\ \mu(\Sigma) = 0 & \end{cases} \quad (5.19)$$

Viceversa, se μ, σ, u risolvono la (5.19) allora u risolve (5.18), $m\mu/I$ è soluzione del problema di ottimizzazione di forma (5.2) e $I\sigma/m$ è soluzione del problema (5.15).

Capitolo 6

Trasporto ottimale con regione di Dirichlet libera

In questo capitolo concentreremo la nostra attenzione sui problemi di trasporto ottimo con regione di Dirichlet libera ([10]). Una regione di Dirichlet è un sottoinsieme dove il costo del trasporto è nullo.

6.1 Introduzione

Fissiamo un aperto limitato con bordo lipschitziano Ω di \mathbf{R}^N , due misure μ^+ e μ^- positive finite definite sui boreliani di $\overline{\Omega}$. Considereremo su $\overline{\Omega}$ la *distanza geodetica* definita da

$$d_{\Omega}(x, y) := \inf \left\{ \int_0^1 |\alpha'(t)| dt : \alpha \in \text{Lip}([0, 1], \overline{\Omega}), \alpha(0) = x, \alpha(1) = y \right\}$$

La distanza geodetica tiene maggiormente conto della geometria dell'aperto Ω se questo non è convesso ed è la distanza più naturale su $\overline{\Omega}$.

Il parametro libero nel nostro problema è un chiuso Σ di $\overline{\Omega}$, detto *regione di Dirichlet*. Si introduce la semi-distanza

$$d_{\Omega, \Sigma}(x, y) := \min\{d_{\Omega}(x, y), d_{\Omega}(x, \Sigma) + d_{\Omega}(y, \Sigma)\}$$

Da notare che la distanza introdotta è quella che compare nella formulazione dei problemi di trasporto associati al problema di shape optimization 5.1. Se $x, y \in \Sigma$, $d_{\Omega, \Sigma}(x, y) = 0$. Se invece $y \in \Sigma$, $d_{\Omega, \Sigma}(x, y) = d_{\Omega}(x, \Sigma)$. Quindi la pseudo-distanza introdotta attribuisce un costo nullo al trasporto effettuato entro la regione di Dirichlet Σ .

6.2. Optimal location problems

La classe delle misure ammissibili è più ampia di quella classica. In questo caso μ è un *piano di trasporto* se

$$\pi_{\#}^+ \mu_{\perp}(\overline{\Omega} \setminus \Sigma) - \pi_{\#}^- \mu_{\perp}(\overline{\Omega} \setminus \Sigma) = \mu^+_{\perp}(\overline{\Omega} \setminus \Sigma) - \mu^-_{\perp}(\overline{\Omega} \setminus \Sigma)$$

Indichiamo con $\mathcal{P}(\mu^+, \mu^-)$ la classe delle misure ammissibili. Poniamo

$$MK(\Omega, \Sigma, \mu^+, \mu^-) := \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mu^+, \mu^-)} \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} c(d_{\Omega, \Sigma}(x, y)) \, d\mu \quad (6.1)$$

dove c è una funzione semicontinua inferiormente e positiva. Nei problemi che ci interesseranno Σ varierà nella classe dei chiusi di $\overline{\Omega}$ con un massimo numero di componenti connesse prefissato e lunghezza massima limitata da l : $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq 1$. Il problema che ci interessa è dunque il seguente.

Problema 6.1. Sia Ω un aperto limitato di \mathbf{R}^N e siano μ^+ e μ^- misure positive finite. Dato un intero n e un reale positivo l , minimizzare il funzionale

$$\Sigma \rightarrow MK(\Omega, \Sigma, \mu^+, \mu^-)$$

al variare di Σ nella classe dei chiusi di $\overline{\Omega}$ con al più n componenti connesse e di misura 1-dimensionale al più l .

6.2 Optimal location problems

Un caso particolarmente rilevante è quello in cui μ^+ è una misura positiva finita data da una densità L^1 rispetto alla misura di Lebesgue e $\mu^- = 0$. In questo caso il funzionale MK si riduce a

$$MK(\Omega, \Sigma, \mathcal{L}^n_{\perp} \overline{\Omega}, 0) = \int_{\overline{\Omega}} d_{\Omega, \Sigma}(x, \Sigma) \, d\mu^+$$

che è il funzionale *distanza media* da Σ . Infatti, se la misura $\mu = (Id \times t)_{\#} \mu^+$ è indotta da un trasporto t , si ha $t_{\#} \mu^+_{\perp}(\overline{\Omega} \setminus \Sigma) = 0$ da cui

$$\mu^+(t^{-1}(B)) = 0$$

per ogni boreliano B contenuto in $\overline{\Omega} \setminus \Sigma$ e

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} d_{\Omega, \Sigma}(x, y) \, d\mu &= \int_{\overline{\Omega}} d_{\Omega, \Sigma}(x, t(x)) \, d\mu^+ = \\ &= \int_{t^{-1}(\Sigma)} d_{\Omega, \Sigma}(x, t(x)) \, d\mu^+ + \int_{t^{-1}(\overline{\Omega} \setminus \Sigma)} d_{\Omega, \Sigma}(x, t(x)) \, d\mu^+ = \\ &= \int_{\Sigma} d_{\Omega}(x, \Sigma) \, d\mu^+ = \int_{\overline{\Omega}} d_{\Omega}(x, \Sigma) \, d\mu^+ = \int_{\overline{\Omega}} d_{\Omega}(x, \Sigma) \, d\mu^+ \end{aligned}$$

6.2. Optimal location problems

Tutto ciò può essere generalizzato considerando il costo dato da

$$(x, y) \mapsto c(d_{\Omega, \Sigma}(x, y))$$

dove c è una funzione reale non negativa e semicontinua inferiormente.

Il problema che stiamo per enunciare si può porre come il modo di posizionare un numero dato di luoghi di produzione in una regione Ω per minimizzare il costo di trasporto del bene prodotto alla popolazione. Supporremo che la densità di popolazione sia data da una misura positiva finita μ^+ .

Problema 6.2 (Optimal location problem). Sia μ^+ una misura positiva finita data da una densità $f^+ \in L^1$, $n \in \mathbb{N}$ un intero fissato e c una funzione reale non negativa e semicontinua inferiormente. Minimizzare il funzionale

$$\Sigma \mapsto \int_{\bar{\Omega}} c(d_{\Omega}(x, \Sigma)) \, d\mu^+ \quad (6.2)$$

al variare di Σ nella classe dei sottoinsiemi di $\bar{\Omega}$ di cardinalità al più n .

È un caso particolare del problema 6.1. Infatti per il corollario 1.8 un sottoinsieme con al più n componenti connesse e di lunghezza nulla è costituito da al più n punti. Quindi l'optimal location problem si ottiene ponendo $l = 0$.

Recentemente l'optimal location problem è stato studiato da Morgan e Bolton in [20] sebbene sia stato oggetto di altre pubblicazioni meno recenti di Bollobas [4] e Bollobas e Stern [5].

Nei risultati che qui presentiamo supponiamo che consumatori tutti uguali siano distribuiti omogeneamente sulla regione Ω di piano che ci interessa con densità uniforme e che ogni consumatore richieda la stessa quantità del bene prodotto. Inoltre supporremo che il costo del trasporto del bene sia proporzionale alla distanza. Per schematizzare siamo quindi nel caso $N = 2$, $c(d) = d$, $\mu^+ = \mathcal{L}^N \llcorner \bar{\Omega}$.

6.2.1 Domini limitati

Lemma 6.3. *Nella classe degli poligoni con N lati di area unitaria, la distanza media ρ da un punto O fissato è minimizzata da quelli regolari il cui centro è O . Su ogni altro N -gono la distanza media è strettamente più grande.*

6.2. Optimal location problems

Dimostrazione. Consideriamo un poligono di N lati che minimizzi la distanza media ρ . Se M è il punto medio di un lato e $M \neq O$, l'angolo θ fra questo lato e la retta passante per O e M deve essere di $\pi/2$. Altrimenti con una famiglia di rotazioni attorno a P si ottiene una famiglia di poligoni tali che per la distanza media ρ e per l'area A valgono le seguenti

$$\frac{d\rho}{d\theta} < 0, \quad \frac{dA}{d\theta} = 0$$

Quindi aumentando θ si ottengono dei poligoni di area unitaria e distanza media strettamente più piccola, quindi quello di partenza non poteva essere un minimo. Poiché il punto medio di ogni lato incontra il raggio per il punto O a un angolo di $\pi/2$, il poligono minimizzante è inscritto in una circonferenza.

Inoltre ogni lato deve avere la stessa distanza media da O . Altrimenti spostando alcuni lati verso l'interno e altri verso l'esterno si potrebbe diminuire la distanza media ρ . Il minimo è dunque un poligono regolare centrato in O . \square

Osservazione 6.4. Un calcolo elementare fornisce il seguente valore per la distanza media $\rho_0(N)$ dal centro di un poligono regolare con N lati:

$$\rho_0(N) = \frac{N}{3(N \tan(\pi/N))^{\frac{3}{2}}} \left(\log \left(\tan(\pi/N) + \sqrt{1 + (\tan(\pi/N))^2} \right) + \tan(\pi/N) \sqrt{1 + (\tan(\pi/N))^2} \right) \quad (6.3)$$

Lemma 6.5. *Data una suddivisione di un quadrato costituita da un numero finito di poligoni convessi che si intersecano solo in lati e vertici coincidenti, con vertici di grado almeno tre (eccetto al più i vertici del quadrato), il numero medio di lati per poligono è minore di sei.*

Dimostrazione. Chiamiamo n il numero dei poligoni convessi che costituisce la pavimentazione, $N(P)$ il numero di lati di un poligono P e N_0 il numero di lati esterni. Allora il numero totale di lati e è dato da

$$e = \sum_P \frac{N(P)}{2} + \frac{N_0}{2}$$

Poiché i poligoni in considerazione sono convessi, ogni vertice (eccetto al più quelli esterni) appartiene ad almeno tre facce. Tutti i vertici esterni (a parte al più quelli del quadrato) stanno su almeno due facce. Quindi in numero di vertici v soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$v \leq \sum_P \frac{N(P)}{3} + \frac{N_0}{3} + \frac{4}{3}$$

6.2. Optimal location problems

Per la formula di Eulero $v - e + n = 1$, quindi

$$1 = v - e + n \leq \left(\sum_P \frac{N(P)}{3} + \frac{N_0}{3} + \frac{4}{3} \right) - \left(\sup_P \frac{N(P)}{2} + \frac{N_0}{2} \right) + n$$

$$n - \sum_P \frac{N(P)}{6} \geq 1 - \frac{4}{3} + \frac{N_0}{6} \geq 1 - \frac{4}{3} + \frac{4}{6} = \frac{1}{3} > 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_P N(P) < 6$$

che è quello che si voleva dimostrare. □

Teorema 6.6. *Consideriamo una suddivisione di un quadrato di area A in n regioni P_i e sia p_i (il “centro di produzione”) un punto di P_i . Allora la distanza media ρ definita da*

$$\rho = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \int_{P_i} |x - p_i| \, dx$$

è maggiore della distanza media dal centro di un esagono regolare di area A/n . In formula:

$$\rho \geq \left(\frac{A}{n} \right)^{1/2} \rho_0(6)$$

Dimostrazione. Possiamo assumere che P_i sia l'insieme dei punti del quadrato la cui distanza da p_i è minore o uguale a quella da ogni altro p_j per $j \neq i$. Sia N_i il numero di lati di P_i e A_i l'area di P_i . Per il lemma 6.3 segue che

$$\rho = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \int_{P_i} |x - p_i| \, dx \geq \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n A_i^{3/2} \rho_0(N_i)$$

Vogliamo minimizzare la funzione f definita da

$$f(A_1, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^n A_i^{3/2} \rho_0(N_i)$$

sulla varietà $A_1 + \dots + A_n = A$. Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ottiene:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial A_i} - \lambda = \frac{3}{2} A_i^{1/2} \rho_0(N_i) - \lambda \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

6.2. Optimal location problems

quindi $A_i = c\rho_0(N_i)^{-2}$, dove c è una opportuna costante. Sostituendo nell'equazione del vincolo l'espressione di A_i appena trovata, si ottiene

$$c = \frac{A}{\sum_{i=1}^n \rho_0(N_i)^{-2}}$$

Quindi

$$\rho \geq \frac{1}{A} \frac{A^{3/2}}{(\sum_{i=1}^n \rho_0(N_i)^{-2})^{3/2}} \sum_{i=1}^n \rho_0(N_i)^{-3} \rho_0(N_i) = A^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \rho_0(N_i)^{-2} \right)^{-1/2}$$

Basta allora vedere che

$$\frac{1}{\rho_0(6)^2} > \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_0(N_i)^2}$$

Per il lemma 6.5 abbiamo che

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i \leq 6$$

Inoltre $1/\rho_0(N)$ è una funzione strettamente crescente di N quindi

$$\frac{1}{\rho_0(6)} > \frac{1}{\rho_0(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i)}$$

Basta allora dimostrare la concavità della funzione $N \mapsto 1/\rho_0(N)$. Questa sarà conseguenza della seguente disuguaglianza

$$\frac{1/\rho_0(6)^2 - 1/\rho_0(M)^2}{6 - M} > \frac{1/\rho_0(N)^2 - 1/\rho_0(6)^2}{N - 6}$$

per $3 \leq M < 6 < N$ che a sua volta segue dalla (6.3). \square

6.2.2 Suddivisioni dell'intero piano

Una suddivisione del piano in esagoni regolari di area unitaria minimizza la distanza media dal centro di produzione in confronto a una qualsiasi altra suddivisione in regioni convesse in cui l'area media sia ancora unitaria. Questo è il contenuto del teorema 6.8

Lemma 6.7. *Sia C una regione convessa di \mathbf{R}^2 di diametro δ . Allora la sua distanza media da un generico punto p di \mathbf{R}^2 è almeno $\delta/128$.*

6.2. Optimal location problems

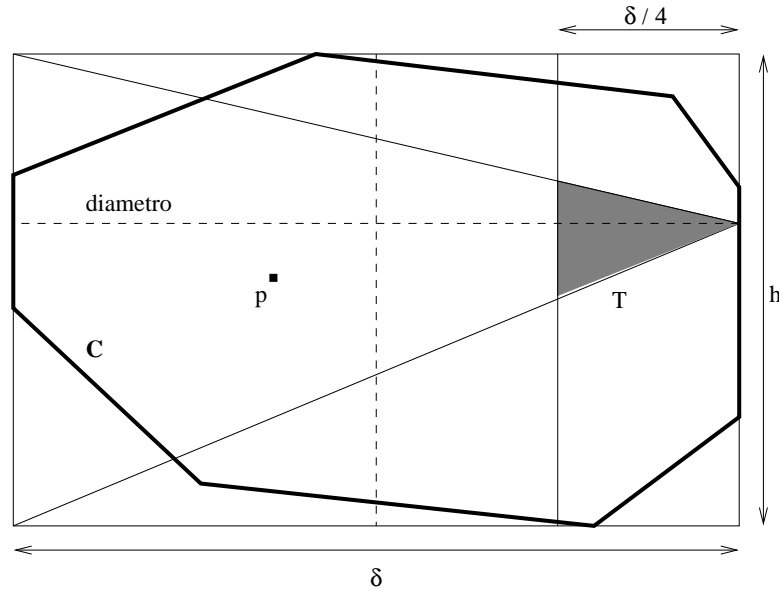


Figura 6.1: dimostrazione del lemma 6.7

Dimostrazione. Consideriamo un rettangolo R in cui C sia inscritto. Chiamiamo δ la lunghezza della base e h quella dell'altezza. Possiamo assumere che p sia come nella figura 6.1. Come si verifica, il triangolo T è sempre contenuto in C .

Allora

$$\int_C |x-p| dx \geq \int_T |x-p| dx \geq \frac{\delta}{4} \text{area } T \geq \frac{\delta}{4} \frac{1}{2} \frac{h}{4} \frac{\delta}{4} \geq \frac{\delta}{128} \delta h \geq \frac{\delta}{128} \text{area } C \quad \square$$

Teorema 6.8. Consideriamo una suddivisione del piano in poligoni convessi P_i di area A_i . Sia p_i il punto associato a P_i . Indicato con $Q(r)$ il quadrato centrato nell'origine con i lati paralleli agli assi e di lunghezza r , supponiamo che l'insieme $\{P_i \subseteq Q(r)\}$ sia finito e che, detta $A(r)$ la media delle aree dei poligoni contenuti in $Q(r)$, si abbia

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} A(r) \geq 1$$

Sia

$$\rho(r) = \frac{1}{r^2} \int_{Q(r)} |x - p_i(x)| dx$$

dove $p_i(x)$ è il punto associato alla regione che contiene x . Allora

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \rho(r) \geq \rho_0(6)$$

6.2. Optimal location problems

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, prendiamo $r = 2048\rho_0(6)/\varepsilon^2$. Sia $P_i(r) = P_i \cap Q(r)$, $A_i(r) = \text{area } P_i(r)$ e $Q = \{P_i(r) : 0 < A_i(r) < A_i\}$.

Se

$$\sum_{P_i(r) \in Q} A_i(r) \leq \varepsilon r^2$$

i poligoni $P_i(r)$ per cui $A_i(r) > 0$ suddividono $Q(r)$ e l'area media è almeno $1 - \varepsilon$. Per il teorema 6.6 si ha allora che $\rho(r) > (1 - \varepsilon)^{1/2} \rho_0(6)$.

Se invece

$$\sum_{P_i(r) \in Q} A_i(r) \geq \varepsilon r^2$$

la parte di

$$\bigcup_{P_i(r) \in Q} P_i(r)$$

che dista almeno $\delta = \varepsilon r/8$ da $\partial Q(r)$ ha area almeno $\varepsilon r^2/2$. Per il lemma 6.7 questa regione contribuisce al valore di $\rho(r)$ almeno per $(\delta/128)(\varepsilon/2)$, quindi $\rho(r) \geq \delta\varepsilon 256 = \varepsilon^2 r/2048 \geq \rho_0(6)$. \square

6.2.3 Una congettura

Dato un chiuso Σ di $\overline{\Omega}$, indichiamo con $T(\Sigma)$ il funzionale

$$\Sigma \rightarrow T(\Sigma) = \int_{\overline{\Omega}} d(x, \Sigma) f^+(x) \, dx$$

dove f^+ è la densità L^1 di μ^+ rispetto alla misura di Lebesgue. Detto allora

$$T_n = \inf\{T(\Sigma) : \text{card } \Sigma \leq n\}$$

si vede immediatamente che $T_n = O(n^{-1/N})$.

Facendo riferimento alla figura 6.2, fissato n , inscrivendo la regione Ω entro un rettangolo $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$, poi dividendo i lati in $n^{1/N}$ si trova una sottoinsieme Σ di $\overline{\Omega}$ di al più n punti tale $d(x, \Sigma) < Cn^{-1/N}$ da cui segue quanto asserito. È quindi interessante lo studio del Γ -limite del funzionale

$$T_n(\Sigma) = \begin{cases} T(\Sigma)/T_n & \text{se } \text{card } \Sigma \leq n \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

rispetto alla convergenza data da

$$\Sigma_n \rightarrow \lambda \iff \frac{1}{n} \mathcal{H}^0(\Sigma_n) \rightarrow^* \lambda$$

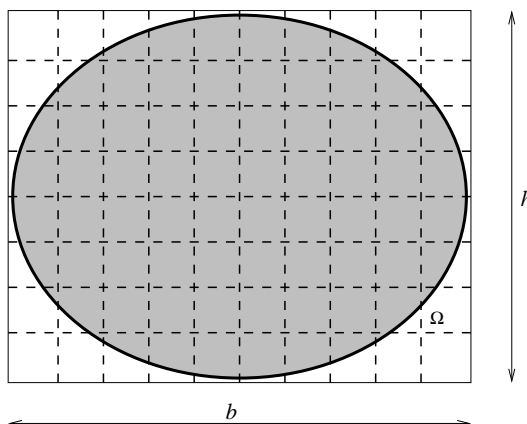


Figura 6.2: stima asintotica per l'optimal location problem

Una congettura è che nel caso Ω sia convesso, il Γ -limite sia dato dal funzionale

$$T_\infty(\lambda) = C \int_{\Omega} f^+(x) \lambda^{-1/N}$$

In base al teorema 6.8 se nel caso $N = 2$ la congettura è vera la costante C è $\rho_0(6) \approx 0.3772$ che si può ricavare dalla (6.3).

Un'altra conseguenza sarebbe che, asintoticamente, la misura ottimale sarebbe proporzionale a $(f^+(x))^{N/(N+1)}$.

6.3 Esistenza dell'insieme ottimale

L'argomento di questo paragrafo è una generalizzazione del problema 6.2. Fissato un intero positivo n e un reale $l \geq 0$, cercheremo di minimizzare il funzionale (6.2) nella classe dei chiusi Σ di $\bar{\Omega}$ con al più n componenti connesse e misura 1-dimensionale al più l , cioè $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$. Ci si riduce al problema 6.2 ponendo $l = 0$.

Per ora supporremo anche che Σ sia connesso. Poiché Ω, μ^+, μ^- sono fissati scriveremo $MK(\Sigma)$ in luogo di $MK(\Omega, \Sigma, \mu^+, \mu^-)$.

Teorema 6.9. *Supponiamo che c sia semicontinua inferiormente e non negativa. Allora il funzionale*

$$\Sigma \mapsto MK(\Sigma)$$

ammette minimo nella classe dei chiusi connessi tali che $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$.

6.3. Esistenza dell'insieme ottimale

Dimostrazione. Chiamiamo \mathcal{A} la classe di chiusi connessi di lunghezza al più l . Sia $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione minimizzante. Per il teorema 1.15, possiamo supporre, a meno di estrarre una sottosuccessione, che $\Sigma_n \xrightarrow{\mathcal{H}} \Sigma$ dove $\Sigma \subseteq \bar{\Omega}$ è un chiuso. Inoltre per il teorema 1.21, Σ è connesso e $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$. La convergenza di Hausdorff implica che

$$d_{\Omega, \Sigma_n} \rightarrow d_{\Omega, \Sigma} \quad \text{uniformemente}$$

Infatti se $\sigma \in \Sigma$ e $\sigma_n \in \Sigma_n$, abbiamo

$$d(x, \Sigma) \leq d(x, \sigma) \leq d(x, \sigma_n) + d(\sigma_n, \sigma) \leq d(x, \sigma_n) + d_H(\Sigma, \Sigma_n)$$

da cui per l'arbitrarietà σ_n

$$d(x, \Sigma) \leq d(x, \Sigma_n) + d_H(\Sigma, \Sigma_n)$$

Scambiando Σ con Σ_n si ottiene

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |d(x, \Sigma) - d(x, \Sigma_n)| \leq d_H(\Sigma, \Sigma_n)$$

e quindi la convergenza uniforme di d_{Ω, Σ_n} a $d_{\Omega, \Sigma}$.

Sia $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un piano di trasporto ottimale per il problema $\mu \mapsto MK(\Sigma_n)$. A meno di sottosuccessioni, possiamo supporre che esista una misura μ tale che $\mu_n \rightharpoonup^* \mu$. Dimostriamo che μ è il piano di trasporto ottimale per il problema $MK(\Sigma)$. Vediamo, per prima cosa, che μ è una misura ammissibile. Infatti, poiché μ_n è ammissibile, se $\psi \in \mathcal{C}_c(\bar{\Omega} \setminus \Sigma_n)$, abbiamo

$$\int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \psi \, d(\pi_{\#}^+ \mu_n - \pi_{\#}^- \mu_n) = \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \psi \, d(\mu^+ - \mu^-)$$

Tenuto conto che per ogni $\psi \in \mathcal{C}_c(\bar{\Omega} \setminus \Sigma)$ da un certo N in poi si ha $\psi \in \mathcal{C}_c(\bar{\Omega} \setminus \Sigma_n)$. Passando al limite

$$\int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \psi \, d(\pi_{\#}^+ \mu - \pi_{\#}^- \mu) = \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \psi \, d(\mu^+ - \mu^-)$$

cioè μ è ammissibile. Inoltre per $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} c(d_{\Omega, \Sigma_n}(x, y)) \, d\mu_n \rightarrow \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} c(d_{\Omega, \Sigma}(x, y)) \, d\mu$$

Infatti

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} c(d_{\Omega, \Sigma}(x, y)) \, d\mu - \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} c(d_{\Omega, \Sigma_n}(x, y)) \, d\mu_n &= \\ &= \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} c(d_{\Omega, \Sigma}(x, y)) \, d(\mu - \mu_n) + \\ &\quad + \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} (c(d_{\Omega, \Sigma}(x, y)) - c(d_{\Omega, \Sigma_n}(x, y))) \, d\mu_n \end{aligned} \quad (6.4)$$

Il primo integrale è nullo perché $\mu_n \rightarrow^* \mu$. Il secondo perché l'integrando tende a zero uniformemente. Fissato $\varepsilon > 0$, sia N tale che

$$n \geq N \implies \sup_{x, y \in \bar{\Omega}} |c(d_{\Omega, \Sigma}(x, y)) - c(d_{\Omega, \Sigma_n}(x, y))| < \varepsilon$$

Allora

$$\left| \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} (c(d_{\Omega, \Sigma}(x, y)) - c(d_{\Omega, \Sigma_n}(x, y))) \, d\mu_n \right| \leq \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \varepsilon \, d\mu_n$$

Al limite

$$\left| \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} (c(d_{\Omega, \Sigma}(x, y)) - c(d_{\Omega, \Sigma_n}(x, y))) \, d\mu_n \right| \leq \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \varepsilon \, d\mu \leq \varepsilon \mu(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$$

da cui quanto affermato. □

Con alcune semplici modifiche possiamo generalizzare il teorema precedente al caso non connesso.

Teorema 6.10. *Supponiamo che c sia semicontinua inferiormente e non negativa. Allora il funzionale*

$$\Sigma \mapsto MK(\Sigma)$$

ammette minimo nella classe dei chiusi con al più numero fissato n di componenti connesse tali che $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$.

Dimostrazione. Sia $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione minimizzante. Come nel teorema precedente possiamo supporre $\Sigma_n \xrightarrow{\mathcal{H}} \Sigma$, dove Σ è un chiuso di $\bar{\Omega}$. Σ ha al più N componenti connesse. Supponiamo, per assurdo, che ci siano almeno $N + 1$ componenti connesse $\Sigma^1, \dots, \Sigma^{N+1}$. Scegliamo ε in modo che $0 < \varepsilon < d(\Sigma^i, \Sigma^j)$ per $i, j = 1, 2, \dots, N + 1$ e $M \in \mathbb{N}$ tale che $\Sigma_M \subseteq \Sigma_\varepsilon$

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

e $\Sigma \subseteq (\Sigma_M)_\varepsilon$. Allora, per la prima delle due inclusioni, Σ_M avrebbe $N + 1$ componenti connesse, contro l'ipotesi. Inoltre si vede che $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$. Infatti per la convergenza di Hausdorff si vede che si può scrivere

$$\Sigma = \Sigma^1 \cup \dots \cup \Sigma^n$$

con

$$\mathcal{H}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n^k = \Sigma^k$$

Da ciò

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\Sigma) &\leq \mathcal{H}^1(\Sigma^1) + \dots + \mathcal{H}^1(\Sigma^N) \leq \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(\Sigma_n^1) + \dots + \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(\Sigma_n^N) \leq \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{H}^1(\Sigma_n^1) + \dots + \mathcal{H}^1(\Sigma_n^N)) \leq \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(\Sigma_n) \leq l \end{aligned}$$

Analogamente al precedente risultato di esistenza si dimostra che d_{Ω, Σ_n} converge uniformemente a $d_{\Omega, \Sigma}$ e si conclude la dimostrazione nello stesso modo. \square

Osservazione 6.11. Questo teorema comprende il caso in cui $l = 0$, cioè Σ è un sottoinsieme di $\overline{\Omega}$ di al più n punti.

6.4 Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

In questa parte presenteremo vari risultati. Tutti fanno pensare che l'insieme ottimale Σ_{opt} debba soddisfare certi requisiti di regolarità e non sia quindi un generico insieme chiuso di $\overline{\Omega}$. Lo scopo di questo paragrafo è di porre vari quesiti e in che modo questi problemi sono stati (anche soltanto parzialmente) risolti.

Supponiamo in tutta la sezione che Ω sia un aperto convesso e limitato di \mathbf{R}^N . Supponiamo inoltre che il costo c sia la funzione $t \mapsto c(t) = t$, $\mu^+ = \mathcal{L} \llcorner \overline{\Omega}$, $\mu^- = 0$.

Nel caso che μ^+ sia data da una densità $f^+ \in L^1$ e $\mu^- = 0$ questo problema è detto *irrigation problem*. Σ rappresenta la rete di canali, Ω la regione da irrigare. La massa presente nel punto x è data da $f^+(x) dx$ e il costo per irrigarla è dato da $x \mapsto c(d(x, \Sigma))$.

6.4.1 Punti singolari

Il seguente risultato dovrebbe far pensare che se l'insieme Σ_{opt} contiene più rami, le ramificazioni avvengono in punti tripli. Il teorema che ora enunciamo afferma che una “croce” non può essere un insieme ottimale nel caso bidimensionale. Prima però di poter dimostrare il teorema è necessario proporre un lemma.

Lemma 6.12. *Sia $N = 2$ e sia Σ un sottoinsieme connesso di $\overline{\Omega}$ tale che $\Sigma \cap \Omega$ sia non vuota. Esistono allora costanti $C > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esiste un segmento L_ε di lunghezza ε tale che*

1. $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup L_\varepsilon$ è connesso
2. vale la seguente disuguaglianza

$$\int_{\overline{\Omega}} d(x, \Sigma_\varepsilon) \, dx \leq \int_{\overline{\Omega}} d(x, \Sigma) \, dx - C\varepsilon^{3/2}$$

Dimostrazione. Sia A un punto di $\Sigma \cap \Omega$ e O un punto di $\Omega \setminus \Sigma$ tale che A sia la proiezione di O su Σ . Supponiamo che

- O sia l'origine degli assi
- $B_1(0) \subseteq \Omega$
- $\Sigma \cap B_1(0) = \emptyset$
- $A := (0, -1) \in \Sigma \cap \overline{B_1(0)}$

Poniamo $A_\varepsilon := (0, -1 + \varepsilon)$, $L_\varepsilon := [A, A_\varepsilon]$, $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup L_\varepsilon$. Vogliamo dimostrare una stima per la misura 2-dimensionale dell'insieme

$$\Lambda_\varepsilon := \{z = (x, y) \in B_1 : y \leq 0, d(z, A_\varepsilon) - d(z, \partial B_1) \leq -\varepsilon/4\}$$

Vogliamo mostrare che esiste una costante $C > 0$ e un $\varepsilon_0 > 0$ tale che se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, allora

$$\mathcal{L}^2(\Lambda_\varepsilon) \geq C\varepsilon^{1/2}$$

Prendiamo $0 < k < 1/2$ e consideriamo l'insieme

$$\Pi_{k,\varepsilon} := \{z = (x, y) : |y + 1/2| \leq \frac{(1 - 4k^2)^{1/2}}{2}, |x| \leq k\varepsilon^{1/2}\}$$

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

Se $z = (x, y) \in \Pi_{k,\varepsilon}$, abbiamo

$$\begin{aligned} d(z, A_\varepsilon) - d(z, \partial B_1) &= (x^2 + (y + 1 - \varepsilon)^2)^{1/2} + (x^2 + y^2)^{1/2} - 1 \leq \\ &\leq (k^2\varepsilon + (y + 1 - \varepsilon)^2)^{1/2} + (k^2\varepsilon + y^2)^{1/2} - 1 = \\ &= |y + 1| \left(1 + \frac{\varepsilon(k^2 - 2(y + 1))}{(y + 1)^2} + \frac{\varepsilon^2}{(y + 1)^2}\right)^{1/2} + |y| \left(1 + \frac{k^2\varepsilon}{y^2}\right)^{1/2} - 1 \leq \end{aligned}$$

sfruttando la disuguaglianza $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$

$$\begin{aligned} &\leq |y + 1| \left(1 + \frac{\varepsilon(k^2 - 2(y + 1))}{2(y + 1)^2} + \frac{\varepsilon^2}{2(y + 1)^2}\right) + |y| \left(1 + \frac{k^2\varepsilon}{2y^2}\right) - 1 \leq \\ &\leq |y + 1| + \frac{\varepsilon(k^2 - 2(y + 1))}{2|y + 1|} + \frac{\varepsilon^2}{2|y + 1|} + |y| + \frac{k^2\varepsilon}{2|y|} - 1 \leq -\frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

grazie al fatto che se $z \in \Pi_{k,\varepsilon}$, allora $k^2/(y + 1) - 2 + k^2/|y| \leq -1$. Da ciò segue che $\Pi_{k,\varepsilon} \subseteq \Lambda_\varepsilon$ e

$$\mathcal{L}^2(\Lambda_\varepsilon) \geq \mathcal{L}^2(\Pi_{k,\varepsilon}) \geq C\varepsilon^{1/2}$$

Questa stima sulla misura di Λ_ε permette di concludere la dimostrazione. Abbiamo infatti per $z = (x, y) \in \Lambda_\varepsilon$ si ha

$$d(z, \Sigma_\varepsilon) \leq d(z, A_\varepsilon) \leq d(z, \partial B_1) - \frac{\varepsilon}{4} \leq d(z, \Sigma) - \frac{\varepsilon}{4}$$

da cui

$$\int_{\overline{\Omega}} d(z, \Sigma_\varepsilon) \, dz - \int_{\overline{\Omega}} d(z, \Sigma) \, dz \leq -\frac{\varepsilon \mathcal{L}^2(\Lambda_\varepsilon)}{2} \leq -C\varepsilon^{3/2}$$

□

Ora possiamo dimostrare il risultato annunciato.

Teorema 6.13. *Sia $N = 2$. Allora l'unione di due intervalli fra loro perpendicolari la cui intersezione è un punto interno di entrambi non è un insieme ottimale.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che Σ_{opt} sia l'unione di due intervalli perpendicolari che si intersecano in un punto interno a entrambi. Possiamo supporre che il punto di intersezione dei due segmenti sia l'origine degli assi e che i due segmenti giacciono sugli assi x e y rispettivamente. Poniamo $B_\varepsilon = B_\varepsilon(0)$. Per ε piccolo, poiché l'origine è interna ai due segmenti,

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

l'insieme $D_\varepsilon := \Sigma_{opt} \cap \partial B_\varepsilon$ è costituito da esattamente 4 punti. Chiamiamo S_ε l'insieme di minima lunghezza che collega i punti di D_ε . Abbiamo

$$\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt} \cap B_\varepsilon) - \mathcal{H}^1(S_\varepsilon) \geq C\varepsilon$$

Per omogeneità basta dimostrarlo per $\varepsilon = 1$. Sia $C_\varepsilon := \Sigma_{opt} \cap B_\varepsilon$. Con semplici calcoli si trova che

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1((1/\varepsilon)C_\varepsilon) &= 4 \\ \mathcal{H}^1(S_1) &= \sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) < 4 \end{aligned}$$

Poniamo $\Sigma_\varepsilon = (\Sigma_{opt} \cap (\bar{\Omega} \setminus B_\varepsilon)) \cup S_\varepsilon$. Si vede immediatamente che

$$d(x, \Sigma_\varepsilon) \leq d(x, \Sigma_{opt}) + 2\varepsilon$$

Inoltre l'insieme dei punti che hanno proiezioni differenti su Σ_{opt} e su Σ_ε è contenuto nel quadrato di centro l'origine coi lati paralleli agli assi e semilato di lunghezza ε . Pertanto abbiamo

$$\int_{\bar{\Omega}} d(x, \Sigma_\varepsilon) \, dx \leq \int_{\bar{\Omega}} d(x, \Sigma_{opt}) \, dx + C\varepsilon^2 \quad (6.5)$$

Per il lemma 6.12 possiamo trovare un segmento di lunghezza $C\varepsilon$ in modo che, detta Σ'_ε l'unione di Σ_ε e di questo segmento, si abbia

$$\int_{\bar{\Omega}} d(x, \Sigma'_\varepsilon) \, dx \leq \int_{\bar{\Omega}} d(x, \Sigma_\varepsilon) \, dx - C'\varepsilon^{3/2} \quad (6.6)$$

Per la (6.5) e la (6.6) abbiamo

$$\int_{\bar{\Omega}} d(x, \Sigma'_\varepsilon) \, dx \leq \int_{\bar{\Omega}} d(x, \Sigma_{opt}) \, dx - C''\varepsilon^{3/2}$$

e quindi Σ_{opt} non può essere ottimale. \square

Osservazione 6.14. Un ragionamento analogo, ma con più dettagli, dimostra che l'unione dei grafici di due curve che si intersecano in un punto x_0 , senza essere tangenti in x_0 , non può essere un insieme ottimale.

6.4.2 Proprietà topologiche

Il teorema che qui ora presentiamo dimostra nel caso $N = 2$ ciò che è una congettura in dimensione superiore. Si è infatti portati a pensare che l'insieme ottimale Σ_{opt} non contenga percorsi chiusi, “loops”. Enunciamo senza dimostrare un teorema che ci sarà utile in seguito. Lo si può trovare in [2].

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

Teorema 6.15 (Besicovich, Marstrand, Mattilla). *Sia B un boreliano di \mathbf{R}^N tale che $\mathcal{H}^k(B) < \infty$. Allora B è \mathcal{H}^k -rettificabile se e solo se per \mathcal{H}^k -quasi-ogni $x \in B$ si ha $\Theta_k(B, x) = 1$.*

Teorema 6.16. *Sia Ω un aperto convesso e limitato di \mathbf{R}^2 . Allora per \mathcal{H}^1 -quasi-ogni $x \in \Sigma_{opt}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme $\Sigma_{opt} \setminus B_\varepsilon(x)$ è sconnesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'insieme

$$S := \{x \in \Sigma_{opt} : \text{esiste } \{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbf{N}}, \varepsilon_n \searrow 0 \text{ e } \Sigma_{opt} \setminus B_{\varepsilon_n}(x) \text{ è sconnesso}\}$$

abbiamo misura 1-dimensionale positiva. Chiamiamo $D \subseteq S$ l'insieme dei punti di densità di Σ_{opt} . D è l'insieme

$$D := \{x \in \Sigma_{opt} : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt} \cap B_\varepsilon(x))}{2\varepsilon} = 1\}$$

Poiché Σ_{opt} è un chiuso connesso di lunghezza finita per il teorema 1.17 è \mathcal{H}^1 -rettificabile e per il teorema 6.15 di ha $\mathcal{H}^1(S) = \mathcal{H}^1(D)$. Per ogni $x \in D$ e per ogni $\varepsilon > 0$ chiamiamo $T(x, \varepsilon)$ l'unione dei raggi di trasporto del problema di Monge-Kantorovich con misura iniziale \mathcal{L}^N e misura finale la proiezione di \mathcal{L}^N su Σ_{opt} che terminano in $\Sigma_{opt} \cap B_\varepsilon(x)$. Sia inoltre $\Sigma_\varepsilon(x) := \Sigma_{opt} \setminus B_\varepsilon(x)$. $\Sigma_\varepsilon(x)$ è un chiuso connesso e, poiché $\Sigma_\varepsilon(x) \subseteq \Sigma_{opt}$, abbiamo $\mathcal{H}^1(\Sigma_\varepsilon(x)) \leq l$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d(z, \Sigma_\varepsilon(x)) \, dz &= \int_{\Omega \setminus T(x, \varepsilon)} d(z, \Sigma_\varepsilon(x)) \, dz + \int_{T(x, \varepsilon)} d(z, \Sigma_\varepsilon(x)) \, dz \leq \\ &\leq \int_{\Omega \setminus T(x, \varepsilon)} d(z, \Sigma_{opt}) \, dz + \int_{T(x, \varepsilon)} (d(z, \Sigma_{opt}) + \varepsilon) \, dz = \\ &= \int_{\Omega} d(z, \Sigma_{opt}) \, dz + \varepsilon \mathcal{L}^N(T(x, \varepsilon)) \end{aligned}$$

Si ha inoltre se ψ è la proiezione di \mathcal{L}^N su Σ_{opt}

$$\mathcal{L}^N(T(x, \varepsilon)) = \psi(B_\varepsilon(x))$$

Ma

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\psi(B_\varepsilon(x))}{\varepsilon} < \infty$$

per \mathcal{H}^1 -quasi-ogni $x \in D$. Da ciò esiste una costante $C = C(x)$ tale che

$$\mathcal{L}^N(T(x, \varepsilon)) \leq C\varepsilon$$

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

Quindi \mathcal{H}^1 -quasi-ogni $x \in D$ si ottiene

$$\int_{\Omega} d(z, \Sigma_{\varepsilon}(x)) \, dz \leq \int_{\Omega} d(z, \Sigma_{opt}) \, dz + C\varepsilon^2 \quad (6.7)$$

Sia ora per $x \in D$

$$l(x, \varepsilon) := \mathcal{H}^1(\Sigma_{opt}) - \mathcal{H}^1(\Sigma_{\varepsilon}(x))$$

Vale che $l(x, \varepsilon) = C(x)\varepsilon + o(\varepsilon)$. Per il lemma 6.12 applicato a $\Sigma_{\varepsilon}(x)$ e $l(x, \varepsilon)$ si trova un insieme chiuso e connesso Σ' di $\bar{\Omega}$ tale che $\mathcal{H}^1(\Sigma') = \mathcal{H}^1(\Sigma) + l(x, \varepsilon)$ e

$$\int_{\Omega} d(x, \Sigma') \, dx \leq \int_{\Omega} d(x, \Sigma_{\varepsilon}(x)) \, dx - C\varepsilon^{3/2}$$

Usando la (6.7) si ottiene per $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\int_{\Omega} d(x, \Sigma') \, dx \leq \int_{\Omega} d(x, \Sigma_{opt}) \, dx - C\varepsilon^{3/2}$$

e Σ_{opt} non può quindi essere ottimale. \square

Osservazione 6.17. Nel caso che Σ_{opt} sia sufficientemente regolare, il teorema appena dimostrato implica che è una curva senza incroci.

6.4.3 Distanza dal bordo

In questa sezione dimostreremo che sotto opportune ipotesi l'insieme ottimale Σ_{opt} e il bordo dell'aperto Ω non si intersecano o hanno soltanto una piccola parte in comune. Il primo teorema che presentiamo mostra che nel caso bidimensionale la parte dell'insieme ottimale che appartiene a $\partial\Omega$ ha misura 1-dimensionale nulla. Una congettura è che l'insieme ottimale debba stare lontano da $\partial\Omega$, cioè $\Sigma_{opt} \cap \partial\Omega = \emptyset$. Questo è il contenuto del secondo teorema che afferma, ma solo per piccole lunghezze dell'insieme ottimale, che Σ_{opt} e $\partial\Omega$ non hanno effettivamente punti in comune.

Teorema 6.18. *Sia Ω un aperto convesso di \mathbf{R}^2 con bordo di classe \mathcal{C}^2 avente in ogni punto curvatura positiva. Allora se Σ_{opt} è l'insieme ottimale, si ha $\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt} \cap \partial\Omega) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\alpha := \mathcal{H}^1(\Sigma_{opt} \cap \partial\Omega) > 0$. Definiamo per ogni $\varepsilon > 0$

$$\Omega_{\varepsilon} := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

Sia p_ε la proiezione su $\overline{\Omega}_\varepsilon$, cioè posto $d(x) = d(x, \partial\Omega)$

$$p_\varepsilon(x) := x + (\varepsilon - d(x))^+ \nabla d(x)$$

L'insieme $\Sigma_\varepsilon := p_\varepsilon(\Sigma_{opt})$ è connesso e compatto.

Per prima cosa stimiamo da sotto la differenza $\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt}) - \mathcal{H}^1(\Sigma_\varepsilon)$. Osserviamo che

$$\nabla p_\varepsilon(x) = \text{Id} + (\varepsilon - d(x))^+ \nabla^2 d(x) - \nabla d(x) \otimes \nabla d(x)$$

per $0 \leq d(x) < \varepsilon$ e se $x \in \partial\Omega$; posto $T := \text{Id} - \nabla d(x) \otimes \nabla d(x)$ si ha

$$\nabla p_\varepsilon(x) := T + \varepsilon \nabla^2 d(x)$$

Detto z_ν la proiezione di z nella direzione di $\nu := \nabla d(x)/|\nabla d(x)|$, abbiamo $(Tz, z) = |z|^2 - |z_\nu|^2 \leq |z|^2$. Per le ipotesi di regolarità fatte su $\partial\Omega$ abbiamo che $\nabla^2 d$ è continuo su $\overline{\Omega}$. Invece, poiché la curvatura è positiva vale che

$$-(\nabla d(x)z_\tau, z_\tau) \geq K|z_\tau|^2$$

per ogni $x \in \Omega$. Abbiamo indicato con z_τ la proiezione di z sul piano tangente a $\partial\Omega$ nel punto x . Infine, tenuto conto che $\nabla p_\varepsilon(x)z_\nu = 0$ per ogni $z \in \mathbf{R}^N$, abbiamo che

$$|\nabla p_\varepsilon(x)z| = |\nabla p_\varepsilon(x)z_\tau| \leq (1 - K\varepsilon)|z_\tau| \leq (1 - K\varepsilon)|z|$$

per ogni $x \in \Omega$.

Supponiamo ora, senza perdere di generalità che $\partial\Omega$ sia parametrizzato a velocità unitaria da una curva γ . Posto $S := \Sigma_{opt} \cap \partial\Omega$, per la formula dell'area

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(p_\varepsilon(S)) &= \int_{\gamma^{-1}(S)} |\nabla p_\varepsilon(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \leq \\ &\leq (1 - K\varepsilon) \int_{\gamma^{-1}(S)} |\gamma'(t)| dt = (1 - K\varepsilon)\mathcal{H}^1(S) \end{aligned}$$

Da ciò la stima cercata:

$$\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt}) - \mathcal{H}^1(\Sigma_\varepsilon) \geq \mathcal{H}^1(S) - \mathcal{H}^1(p_\varepsilon(S)) \geq K\varepsilon$$

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

Abbiamo

$$\int_{\Omega} d(z, \Sigma_{\varepsilon}) \, dz \geq \int_{\Omega} d(z, \Sigma_{opt}) \, dz$$

Vogliamo migliorare questa stima. Consideriamo un punto $z \in \Omega$ tale che

$$d(z, \Sigma_{\varepsilon}) > d(z, \Sigma_{opt}) \quad (6.8)$$

Sia z_0 un punto di minima distanza di z da Σ_{opt} . Allora $z_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_{\varepsilon}$. Inoltre abbiamo che $z \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_{\varepsilon}$. Supponiamo per assurdo che $z \notin \overline{\Omega} \setminus \Omega_{\varepsilon}$ e sia $z_{0,\varepsilon} = p_{\varepsilon}(z)$ la proiezione di z_0 su $\partial\Omega$. Poiché Ω_{ε} è convesso, z è nel semipiano delimitato dalla retta tangente a Ω_{ε} nel punto $z_{0,\varepsilon}$. Inoltre z giace nel semipiano delimitato dall'asse del segmento $[z_0, z_{0,\varepsilon}]$. Pertanto abbiamo

$$d(z, z_{0,\varepsilon}) < d(z, z_0)$$

$$d(z, \Sigma_{\varepsilon}) \leq d(z, z_{0,\varepsilon}) < d(z, z_0) = d(z, \Sigma_{opt})$$

che è assurda perché z era stato scelto in modo tale che valesse la (6.8). Sia ora $z_{\varepsilon} = p_{\varepsilon}(z)$ la proiezione di z su $\partial\Omega_{\varepsilon}$. Abbiamo

$$d(z, \Sigma_{\varepsilon}) - d(z, \Sigma_{opt}) = d(z, z_{\varepsilon}) - d(z, z_0) \leq d(z, z_{\varepsilon}) \leq \varepsilon \quad (6.9)$$

Per la (6.9) abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d(z, \Sigma_{\varepsilon}) \, dz - \int_{\Omega} d(z, \Sigma_{opt}) \, dz &\leq \int_{\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon}} (d(z, \Sigma_{\varepsilon}) - d(z, \Sigma_{opt})) \, dz \leq \\ &\leq \varepsilon \mathcal{L}^2(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon}) = C\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

per una opportuna costante C e per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Consideriamo il punto $O \in \Omega_{\varepsilon} \setminus \Sigma_{\varepsilon}$ e un punto di minima distanza O_{ε} di O da Σ_{ε} . Poniamo

$$\Sigma_{\Sigma'_{\varepsilon}} := \Sigma_{\varepsilon} \cup S_{\varepsilon}$$

dove S_{ε} è un segmento di lunghezza $\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt}) - \mathcal{H}^1(\Sigma_{\varepsilon})$ che ha come primo estremo $p_{\varepsilon}(O)$ e ha la direzione della retta da $p_{\varepsilon}(O)$ a O . Per il lemma 6.12 si ha

$$\int_{\Omega} d(z, \Sigma'_{\varepsilon}) \, dz \leq \int_{\Omega} d(z, \Sigma_{\varepsilon}) \, dz - C\varepsilon^{3/2} \quad (6.10)$$

Da (6.9) e (6.10) segue che

$$\int_{\Omega} d(z, \Sigma'_{\varepsilon}) \, dz \leq \int_{\Omega} d(z, \Sigma_{opt}) \, dz - C\varepsilon^{3/2}$$

per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Ciò contraddice l'ottimalità di Σ_{opt} . \square

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

Il prossimo teorema mostra, come preannunciato, che se cerchiamo il minimo del funzionale

$$\Sigma \mapsto \int_{\bar{\Omega}} d_{\Omega, \Sigma}(x, y) \, d\mu$$

nella classe dei chiusi connessi di lunghezza al più l , con l piccolo, allora l'insieme ottimale e il bordo di Ω non hanno punti in comune. Sarà utile il seguente lemma: il problema dell'optimal location di un solo punto non ha soluzioni sul bordo dell'aperto Ω se questo è convesso.

Lemma 6.19. *Sia Ω un aperto convesso di \mathbf{R}^N . Il problema di minimizzare il funzionale*

$$Q \mapsto \int_{\Omega} d(x, Q) \, dx$$

al variare di $Q \in \bar{\Omega}$ non ha soluzioni su $\partial\Omega$.

Dimostrazione. Dimostriamo che un punto P del bordo di Ω non può essere ottimale. Possiamo supporre, a meno di rotazioni e traslazioni, che P sia l'origine delle coordinate e che l'iperpiano $\{x_N > 0\}$ contenga Ω . Si tratta ora di verificare che il funzionale

$$z \mapsto \int_{\Omega} |x - z| \, dx$$

non ha un minimo per $z = 0$. Con un semplice calcolo si trova che

$$\nabla F(z) = \int_{\Omega} \frac{x - z}{|x - z|} \, dx$$

Da ciò segue che

$$\frac{\partial F}{\partial z_N}(0) = - \int_{\Omega} \frac{x_N}{|x|} \, dx < 0$$

poiché x_N è positiva su Ω . L'origine non può quindi essere ottimale. \square

Teorema 6.20. *Sia Ω un sottoinsieme convesso aperto di \mathbf{R}^N . Allora esistono reali positivi l_0 e d_0 tali che se $l \leq l_0$ e Σ_{opt} è l'insieme che risolve il problema di ottimizzazione 6.1, allora si ha $d(\Sigma, \partial\Omega) \geq d_0$. In particolare, si avrà, per $l \leq l_0$, $\Sigma_{opt} \cap \partial\Omega = \emptyset$.*

Dimostrazione. Consideriamo i seguenti funzionali definiti sulla classe dei chiusi connessi di $\bar{\Omega}$ al variare di $l \geq 0$

$$F_l(\Sigma) := \begin{cases} \int_{\Omega} d(x, \Sigma) \, dx & \text{se } \mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

Il Γ -limite per $l \rightarrow 0^+$ è il funzionale

$$F_0(\Sigma) := \begin{cases} \int_{\Omega} d(x, \Sigma) \, dx = \int_{\Omega} |x - p| \, dx & \text{se } \Sigma = \{p\} \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti se $l_n := \mathcal{H}^1(\Sigma_n) \searrow 0$ e $\Sigma_n \xrightarrow{\mathcal{H}} \Sigma$, allora $\mathcal{H}^1(\Sigma) = 0$ per il teorema 1.21 (teorema di Golab). Abbiamo quindi

$$\Sigma = \{p\}, \quad F_0(\Sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{l_n}(\Sigma_n)$$

Supponiamo per assurdo che esista una successione $l_n \rightarrow 0$ e insiemi ottimali Σ_n per il problema 6.1 con $l = l_n$ rispettivamente tali che $d(\Sigma_n, \partial\Omega) \rightarrow 0$. A meno di estrarre una sottosuccessione possiamo supporre che $\Sigma_n \rightarrow \Sigma$ per la convergenza di Hausdorff. Allora $\mathcal{H}^1(\Sigma) = 0$ e, per il lemma 1.8, $\Sigma = \{p\}$ e $p \in \partial\Omega$. Poiché la Γ -convergenza comporta che minimi convergono a minimi, l'insieme $\{p\}$ è un minimo del funzionale F_0 , cioè è un insieme ottimale per il problema 6.1 con $l = 0$. Ciò è assurdo per il lemma 6.19. \square

6.4.4 Stime asintotiche

Dato un reale positivo l , indichiamo con $V(l)$ il valore minimo del costo del trasporto al variare della regione di Dirichlet fra i chiusi connessi di lunghezza minore o uguale a l :

$$V(l) := \inf \left\{ \int_{\bar{\Omega}} d(x, \Sigma) \, dx : \Sigma \text{ chiuso connesso di } \bar{\Omega}, \mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l \right\}$$

In questa sezione presentiamo un risultato che stima l'andamento di $V(l)$ per $l \rightarrow \infty$. Avremo bisogno di questo lemma.

Lemma 6.21. *Sia $N > 1$. Sia Q un ipercubo di \mathbf{R}^N . Supponiamo che Q sia diviso in ipercubi di lato $\varepsilon > 0$. Se l è la lunghezza di una curva lipschitziana $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^N$ e k è il numero di ipercubi di lato ε che intersecano l'immagine di γ , allora*

$$k \leq c_1 \frac{l}{\varepsilon} + c_2$$

per opportune costanti c_1, c_2 non dipendenti da l o ε .

Dimostrazione. Basta notare che, affinché una curva γ intersechi l'unione di $2^N + 1$ ipercubi di lato ε , la sua lunghezza deve essere almeno ε . Questo

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

perché ci sono almeno due ipercubi distanti almeno ε . Proporzionalmente si dovrà avere

$$l \geq \frac{k}{2^N + 1} \varepsilon$$

da cui segue facilmente la tesi. \square

Teorema 6.22. *Sia Ω un aperto di \mathbf{R}^N , $N > 1$. Allora esistono costanti $c, C > 0$ tali che*

$$c \leq V(l)l^{1/(N-1)} \leq C$$

Le costanti dipendono solo da Ω (e da N).

Dimostrazione. Chiamiamo Σ_{opt}^l l'insieme ottimale per il problema 6.1 quando la lunghezza della regione di Dirichlet viene posta minore o uguale a l . Osserviamo che la lunghezza dell'insieme ottimale Σ_{opt}^l è esattamente l . Infatti, se fosse minore, considerando l'unione di Σ_{opt}^l e di un segmento in modo che la lunghezza totale sia l si ottiene un insieme la cui distanza media è strettamente inferiore.

Senza perdita di generalità possiamo supporre che Σ_{opt}^l sia parametrizzato da una curva lipschitziana γ di lunghezza al più $2l$. Sia Q un ipercubo di lato $\varepsilon > 0$ contenuto in Ω . Allora

$$\int_{\Omega} d(x, \Sigma_{opt}^l) dx \geq \int_Q d(x, \Sigma_{opt}^l) dx$$

Sia Q_α uno dei cubi in cui è stato diviso Q che non interseca Σ_{opt}^l . Per $0 \leq \alpha \leq 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{Q_\alpha} d(x, \Sigma_{opt}^l) dx &\geq \int_{\alpha Q_\varepsilon} d(x, \Sigma_{opt}^l) dx \geq \\ &\geq \mathcal{L}^N(\alpha Q_\varepsilon)(1 - \alpha)\varepsilon = \mathcal{L}^N(Q_\varepsilon)\alpha^N(1 - \alpha)\varepsilon = \varepsilon^{N+1}\alpha^N(1 - \alpha) \end{aligned}$$

Si trova infine, studiando la funzione $\alpha \mapsto \alpha^N(1 - \alpha)$,

$$\int_{Q_\alpha} d(x, \Sigma_{opt}^l) dx \geq \frac{\varepsilon^{N+1}}{3(N+1)}$$

Se k' è il numero di ipercubi che non intersecano Σ_{opt}^l , abbiamo

$$\int_Q d(x, \Sigma_{opt}^l) dx \geq \frac{k'\varepsilon^{N+1}}{3(N+1)}$$

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

Tenuto conto che in Q ci sono $k + k' = \varepsilon^{-N}$ ipercubi, per il lemma 6.21 si trova che

$$\int_{\Omega} d(x, \Sigma_{opt}^l) dx \geq \int_Q d(x, \Sigma_{opt}^l) dx \geq \varepsilon - c_1 l \varepsilon^N - c_2 \varepsilon^{N+1}$$

Le costanti c_1, c_2 sono quelle del lemma, quindi non dipendono da ε o da l . Ponendo $\varepsilon = cl^{1/(1-N)}$ si trova

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d(x, \Sigma_{opt}^l) dx &\geq l^{1/(1-N)}(c - c_1 c^N - c_2 c^{N+1} l^{N/(1-N)}) \geq \\ &\geq l^{1/(1-N)}(c - c_1 c^N) \end{aligned}$$

Scegliendo quindi c in modo che $c - c_1 c^N$ sia positivo, si ottiene la stima dal basso cercata.

La stima dall'alto si ottiene facilmente. Sia L un iperpiano che interseca Ω e sia $T := L \cap \Omega$. Su Ω consideriamo un reticolo R di lato ε . Poiché un ipercubo $(N-1)$ -dimensionale ha 2^{N-1} vertici, $(N-1)2^{N-2}$ vertici e ogni spigolo è in comune a 2^{N-2} cubi

$$\mathcal{H}^{N-1}(T \cap R) \leq \frac{\mathcal{H}^{N-1}(T)}{\varepsilon^{N-1}} \frac{(N-1)2^{N-2}\varepsilon}{2^{N-2}} \leq \frac{C}{\varepsilon^{N-2}}$$

Sia Σ l'unione $T \cap R$ e dei segmenti perpendicolari a L e passanti per i vertici di R che stanno in T . Allora

$$\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq \frac{C'}{\varepsilon^{N-1}} \tag{6.11}$$

Per costruzione abbiamo che

$$\sup_{x \in \Omega} d(x, \Sigma) \leq C'' \varepsilon$$

quindi

$$\int_{\Omega} d(x, \Sigma) dx \leq C''' \varepsilon \tag{6.12}$$

Ponendo allora $\varepsilon := (C'l)^{1/(1-N)}$ si ottiene la stima cercata avendo trovato per la (6.11) un sottoinsieme Σ chiuso e connesso di $\bar{\Omega}$ di lunghezza minore o uguale a l per cui vale la (6.12). \square

6.4. Descrizione qualitativa dell'insieme ottimale

Analogamente a quanto visto nella sezione 6.2.3 si può considerare il funzionale

$$T_l(\Sigma) = \begin{cases} T(\Sigma)/V(l) & \text{se } \mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso è stato recentemente dimostrato da Tilli e Mosconi che il Γ -limite è dato da

$$T_\infty(\lambda) = K \int_{\Omega} f^+(x) \lambda^{1/(1-N)}$$

per una opportuna costante K . Ciò implica in particolare che, asintoticamente, la misura ottimale è proporzionale a $(f^+(x))^{(N-1)/N}$ per $L \rightarrow +\infty$. Inoltre si pensa che $K = 1/4$.

Capitolo 7

Un modello di ottimizzazione urbana

7.1 Il problema dell'urban planning

Il problema che poniamo in questo capitolo (che chiameremo *urban planning*) è una generalizzazione dei problemi studiati precedentemente. Date due misure positive μ^+ e μ^- che rappresentano rispettivamente la densità di abitanti e quella di posti di lavoro, si vuole minimizzare il costo medio secondo una metrica che tiene conto di una linea di trasporti Σ . Se vediamo Σ come una rete di trasporti, una metropolitana ad esempio, la distanza che introdurremo attribuisce un costo non nullo al trasporto effettuato su Σ , cioè il costo del biglietto. Nella figura 7.1 si trova un esempio della situazione: sono evidenziate la linea di trasporti, la zona residenziale e quella lavorativa.

Per maggiore precisione enunciamo il problema nella sua generalità.

Problema 7.1 (Urban Planning). Sia Ω un aperto limitato di \mathbf{R}^N e Σ un chiuso connesso di $\overline{\Omega}$. Siano inoltre μ^+ e μ^- due misure positive finite su $\overline{\Omega}$. Definiamo

$$d_{\Sigma}(x, y) := \inf\{\Phi(\mathcal{H}^1(\gamma \setminus \Sigma)) + \Psi(\mathcal{H}^1(\gamma \cap \Sigma)) : \gamma \text{ chiuso connesso, } \{x, y\} \subseteq \gamma \subseteq \overline{\Omega}\} \quad (7.1)$$

Φ e Ψ sono funzioni $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ semicontinue inferiormente, positive su $[0, \infty[$. Supponiamo Φ e Ψ crescenti. Indichiamo con $T(\Sigma)$ il costo del trasporto

7.2. Esistenza dell'insieme ottimale

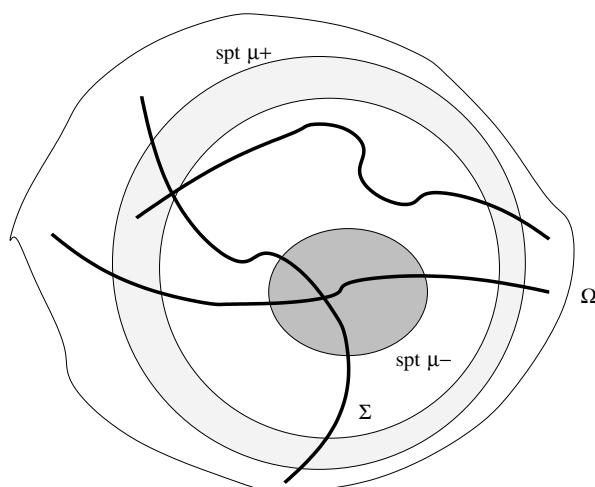


Figura 7.1: il problema dell'urban planning

ottimale per la metrica definita da Σ

$$T(\Sigma) := \inf \left\{ \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} d_{\Sigma}(x, y) \, d\mu : \mu \geq 0, \pi_{\#}^+ \mu = \mu^+, \pi_{\#}^- \mu = \mu^- \right\}$$

Allora si chiede di minimizzare il funzionale

$$\Sigma \rightarrow T(\Sigma)$$

nella classe dei sottoinsiemi Σ di $\bar{\Omega}$ chiusi connessi e di lunghezza minore o uguale a l , $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$.

Facciamo notare che $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$ rappresentano rispettivamente la fatica che si fa a percorrere un tratto di lunghezza t senza mezzo di trasporto e il costo del biglietto per percorrere un tratto di metropolitana di lunghezza t .

Sono di interesse gli stessi quesiti per i problemi di irrigation trattati in precedenza. In particolare ha interesse lo studio dell'esistenza di un insieme Σ ottimale e di eventuali proprietà di regolarità. Qui tratteremo il problema dell'esistenza.

7.2 Esistenza dell'insieme ottimale

In questa sezione ci interesserà l'esistenza di un Σ ottimale. Presentiamo il nostro primo risultato di esistenza. Notiamo che il caso $\alpha = 0$ è già stato dimostrato nel capitolo precedente (teorema 6.9).

7.2. Esistenza dell'insieme ottimale

Teorema 7.2. *Supponiamo che $\Phi(t) = t$ e che $\Psi(t) = \alpha I_{]0, \infty[}(t)$, $\alpha \geq 0$. Allora esiste un chiuso connesso Σ ottimale nella classe dei chiusi connessi con $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$.*

Dimostrazione. In questo caso si verifica facilmente che

$$d_{\Sigma}(x, y) = d_{\Omega}(x, y) \wedge (d(x, \Sigma) + d(y, \Sigma) + \alpha)$$

Consideriamo una successione minimizzante $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e indichiamo con T il limite di $T(\Sigma_n)$. Per il teorema di 1.15 possiamo supporre che $\Sigma_n \xrightarrow{\mathcal{H}} \Sigma$ a meno di sottosuccessioni, quindi

$$d_{\Sigma_n} \rightarrow d_{\Sigma} \text{ uniformemente}$$

Sia μ_n una misura tale che

$$T(\Sigma_n) = \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} d_{\Sigma_n}(x, y) \, d\mu_n$$

A meno di sottosuccessioni possiamo supporre che $\mu_n \rightharpoonup^* \mu$.

Vogliamo vedere che Σ è l'insieme ottimale cercato. Subito si trova che il limite debole μ soddisfa le giuste condizioni sui marginali. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} d_{\Sigma}(x, y) \, d\mu - \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} d_{\Sigma_n}(x, y) \, d\mu_n &= \\ &= \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} (d_{\Sigma}(x, y) - d_{\Sigma_n}(x, y)) \, d\mu_n + \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} d_{\Sigma}(x, y) \, d(\mu - \mu_n) \end{aligned}$$

Il primo addendo del secondo membro converge a zero grazie al fatto che fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente si ha che $-\varepsilon < d_{\Sigma} - d_{\Sigma_n} < \varepsilon$ e quindi

$$-\varepsilon \mu_n(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}) \leq \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} d_{\Sigma}(x, y) - d_{\Sigma_n}(x, y) \, d\mu_n \leq \varepsilon \mu_n(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$$

e $\mu_n(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}) \rightarrow \mu(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$. Il secondo addendo invece converge a zero per definizione di convergenza debole. Vale dunque che

$$T \leq T(\Sigma) \leq \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} d_{\Sigma}(x, y) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} d_{\Sigma_n}(x, y) \, d\mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\Sigma_n) = T$$

quindi $T(\Sigma) = T$ che è la tesi. □

7.2. Esistenza dell'insieme ottimale

Un altro caso di cui ci siamo occupati è quello dei costi lineari, cioè $\Phi(t) = \alpha t$ e $\Psi(t) = \beta t$, con $\alpha > \beta$. Il risultato di esistenza segue da una generalizzazione del teorema di Gołab. Per maggiore chiarezza spezziamo la dimostrazione in due parti. La prima parte è un risultato di localizzazione, mentre il secondo è proprio il teorema che ci interessa.

Teorema 7.3 (Localizzazione del teorema di Gołab). *Sia $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di chiusi connessi di uno spazio metrico X convergenti per la metrica di Hausdorff a un chiuso connesso Γ . Sia U un sottoinsieme aperto di X . Allora*

$$\mathcal{H}^1(\Gamma \cap U) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(\Gamma_n \cap U)$$

Dimostrazione. Definiamo una successione μ_n di misure ponendo

$$\mu_n(B) = \mathcal{H}^1(B \cap \Gamma_n) = \mathcal{H}^1 \llcorner \Gamma_n(B)$$

per ogni boreliano B . A meno di sottosuccessioni si può supporre che $\mu_n \rightharpoonup^* \mu$. Con ragionamenti prima di densità poi basati sul secondo teorema di rettificabilità (teorema 1.17) si dimostra che

$$\mu(\overline{B_{r'}(x)}) \geq 2r' \tag{7.2}$$

per ogni $r' < r < \text{diam}(\Gamma)$ e per \mathcal{H}^1 -quasi-ogni $x \in \Gamma$. È chiaro che $\mu_n \llcorner U$ converge per la topologia debole* a $\mu \llcorner U$. Quindi per \mathcal{H}^1 -quasi-ogni $x \in \Gamma \cap U$ per la misura $\mu \llcorner U$ vale ancora la stima (7.2), da cui

$$\Theta(\mu \llcorner U, x) \geq 1$$

e quindi

$$\mathcal{H}^1(\Gamma \cap U) \leq \mu \llcorner U(X) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n \llcorner U(X) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(\Gamma_n \cap U)$$

che è la tesi. □

Teorema 7.4 (Teorema di Gołab generalizzato). *Siano Γ_n e Σ_n due successioni di chiusi convergenti a Γ e Σ rispettivamente, Γ_n connessi. Allora*

$$\mathcal{H}^1(\Gamma \setminus \Sigma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(\Gamma_n \setminus \Sigma_n) \tag{7.3}$$

7.2. Esistenza dell'insieme ottimale

Dimostrazione. Sia $A = \Gamma \cap \Sigma$. Poiché

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} (\Gamma \setminus \bar{A}_\varepsilon) = \Gamma \setminus \Sigma$$

abbiamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}^1(\Gamma \setminus \bar{A}_\varepsilon) = \mathcal{H}^1(\Gamma \setminus \Sigma)$$

Tenuto conto che definitivamente

$$\Gamma_n \setminus \bar{A}_\varepsilon \subseteq \Gamma_n \setminus A_n \subseteq \Gamma_n \setminus \Sigma_n$$

per la localizzazione del teorema di Golab (teorema 7.3) abbiamo allora

$$\mathcal{H}^1(\Gamma \setminus \bar{A}_\varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(\Gamma_n \setminus \bar{A}_\varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(\Gamma_n \setminus \Sigma_n)$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene la tesi. \square

Abbiamo bisogno anche del seguente lemma di carattere generale.

Lemma 7.5. *Sia X uno spazio metrico compatto. La successione di funzioni continue definite su X a valori reali $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente alla funzione continua f se e soltanto se per ogni $x \in X$ e per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x si ha $\lim f_n(x_n) = f(x)$.*

Dimostrazione.

\Rightarrow Supponiamo che $f_n \rightarrow f$ uniformemente e $x_n \rightarrow x$. Allora

$$|f(x) - f_n(x_n)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_n(x_n)|$$

Il primo addendo del secondo membro tende a zero per continuità di f , mentre il secondo grazie alla convergenza uniforme di f_n verso f . Da ciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$$

\Leftarrow Per dimostrare l'altra implicazione, supponiamo per assurdo che f_n non converga uniformemente a f . Allora esiste un $\varepsilon > 0$ e una successione crescente di interi positivi $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tali che

$$|f(\tilde{x}_{n_k}) - f_{n_k}(\tilde{x}_{n_k})| \geq \varepsilon$$

7.2. Esistenza dell'insieme ottimale

per un opportuno \tilde{x}_{n_k} . Grazie alla compattezza di X si può supporre a meno di estrarre sottosuccessioni che $\tilde{x}_{n_k} \rightarrow x$. Definiamo

$$x_n = \begin{cases} \tilde{x}_{n_k} & \text{se } n = n_k \text{ per qualche } k \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $x_n \rightarrow x$ e quindi $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$. In particolare $f_{n_k}(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ che è assurdo perché

$$\varepsilon \leq |f(\tilde{x}_{n_k}) - f_{n_k}(\tilde{x}_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f_{n_k}(x_{n_k})| \rightarrow 0 \quad \square$$

Segue un secondo risultato di esistenza.

Teorema 7.6. *Supponiamo che $\Phi(t) = \alpha t$ e $\Psi(t) = \beta t$, con $\alpha > \beta$. Allora esiste un chiuso connesso Σ ottimale nella classe dei chiusi connessi con $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$.*

Dimostrazione. Vogliamo vedere che anche in questo caso se $\Sigma_n \xrightarrow{\mathcal{H}} \Sigma$ è una successione minimizzante, allora $d_{\Sigma_n} \rightarrow d_{\Sigma}$ uniformemente a meno di estrarre una sottosuccessione. Per fare ciò mostriamo che

$$d_{\Sigma}(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d_{\Sigma_n}(x_n, y_n), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d_{\Sigma_n}(x_n, y_n) \leq d_{\Sigma}(x, y)$$

per ogni coppia di punti tali che $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ a meno di sottosuccessioni. Grazie al lemma 7.5 seguirà la convergenza uniforme. Osserviamo che

$$\alpha \mathcal{H}^1(\gamma \setminus \Sigma) + \beta \mathcal{H}^1(\gamma \cap \Sigma) = (\alpha - \beta) \mathcal{H}^1(\gamma(I) \setminus \Sigma) + \beta \mathcal{H}^1(\gamma(I))$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Per ogni intero n sia γ_n una chiuso connesso contenente x_n a y_n in modo che

$$(\alpha - \beta) \mathcal{H}^1(\gamma_n(I) \setminus \Sigma_n) + \beta \mathcal{H}^1(\gamma_n(I)) \leq d_{\Sigma_n}(x_n, y_n) + \varepsilon$$

Pur di prendere n grande, possiamo supporre che $d_{\Omega}(x_n, x) < \varepsilon$ e $d_{\Omega}(y_n, y) < \varepsilon$. Se $\tilde{\gamma}_n$ e $\hat{\gamma}_n$ sono curve di lunghezza minore di 2ε che connettono x_n a x e y_n a y rispettivamente, per la curva $\gamma'_n = \gamma_n \cup \tilde{\gamma}_n \cup \hat{\gamma}_n$ avremo che

$$(\alpha - \beta) \mathcal{H}^1(\gamma'_n(I) \setminus \Sigma_n) + \beta \mathcal{H}^1(\gamma'_n(I)) \leq d_{\Sigma_n}(x_n, y_n) + 5\varepsilon$$

A meno di sottosuccessioni possiamo supporre che $\gamma'_n \xrightarrow{\mathcal{H}} \gamma$ per qualche curva γ . Poiché le curve γ'_n contengono i punti x e y , anche il limite γ contiene

7.2. Esistenza dell'insieme ottimale

i punti x e y . Per il teorema di Golab e il teorema di Golab generalizzato, abbiamo allora che

$$d_{\Sigma}(x, y) \leq (\alpha - \beta)\mathcal{H}^1(\gamma(I) \setminus \Sigma) + \beta\mathcal{H}^1(\gamma(I)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d_{\Sigma_n}(x_n, y_n) + 5\varepsilon$$

da cui che $d_{\Sigma}(x, y) \leq \liminf_n d_{\Sigma_n}(x_n, y_n)$.

Prendendo una curva γ da x a y e curve γ_n da x_n a y_n si dimostra che $\limsup_n d_{\Sigma_n}(x_n, y_n) \leq d_{\Sigma}(x, y)$.

La dimostrazione si conclude in modo analogo al primo risultato di esistenza. \square

Appendice A

Note sulla teoria della misura

In questa appendice (X, d) sarà uno spazio metrico fissato.

A.1 Alcune tecniche di teoria della misura

Definizione A.1 (σ -algebra di insiemi o tribù). Una sottoclasse \mathcal{F} di $\mathcal{P}(X)$ che soddisfa le seguenti tre proprietà

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_n \in \mathcal{F}$ per ogni $n \in \mathbb{N} \implies A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

è detta σ -algebra di insiemi o tribù. Tuttavia in seguito, dicendo σ -algebra, intenderemo σ -algebra di insiemi.

Definizione A.2 (Misura esterna). Una funzione $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ tale che

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. μ è numerabilmente subadditiva, cioè

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \implies \mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

è detta *misura esterna*.

A.1. Alcune tecniche di teoria della misura

Definizione A.3 (Misura). Sia μ una misura esterna e \mathcal{F} una σ -algebra. μ si dice *numerabilmente additiva* su \mathcal{F} se per ogni successione $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di \mathcal{F} a due a due disgiunti

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \implies \mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

In tal caso, μ si dice una *misura* su \mathcal{F} .

Il seguente metodo per passare da una misura esterna a una misura è dovuto a Carathéodory.

Definizione A.4 (Misurabilità secondo Carathéodory). Sia μ una misura esterna. Un sottoinsieme A di X è detto μ -*misurabile* se

$$\mu(F) = \mu(F \cap A) + \mu(F \cap A^c)$$

per ogni sottoinsieme F di X .

Teorema A.5 (Carathéodory). Se μ è una misura, la classe dei sottoinsiemi di X μ -misurabili è una σ -algebra.

Dimostrazione. Per la dimostrazione vedi, ad esempio, [3]. □

Definizione A.6 (Misura esterna regolare). Una misura esterna μ tale che per ogni sottoinsieme A di X esiste un insieme μ -misurabile B con $A \subseteq B$ e $\mu(A) = \mu(B)$, è detta *misura esterna regolare*.

Definizione A.7 (Insiemi distanti). Siano A e B due sottoinsiemi di X . A e B si dicono *distanti* se

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$$

Naturalmente, due insiemi distanti sono disgiunti.

Definizione A.8 (Addività sui distanti). Una misura esterna μ si dice *additiva sui distanti* se si ha

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

ogni volta che A e B sono insiemi distanti.

Teorema A.9 (Carathéodory). Sia μ una misura esterna additiva sui distanti. Allora i boreliani sono μ -misurabili.

A.1. Alcune tecniche di teoria della misura

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi per i sottoinsiemi chiusi. Sia C un chiuso non vuoto. Vogliamo vedere che

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap C) + \mu(F \cap C^c)$$

per ogni sottoinsieme F di X . Se $\mu(F) = \infty$ è ovvio. Altrimenti definiamo

$$D_0 := \{x : d(x, C) \geq 1\}, \quad D_n := \{x : \frac{1}{2^n} \leq d(x, C) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\}$$

Poiché due D_n non consecutivi sono distanti abbiamo per ogni m

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap \bigcup_{n=0}^m D_{2n}) = \sum_{n=0}^m \mu(F \cap D_{2n})$$

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap \bigcup_{n=0}^m D_{2n+1}) = \sum_{n=0}^m \mu(F \cap D_{2n+1})$$

da cui segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(F \cap D_n) < \infty$$

Grazie al fatto che C e $D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_m$ sono distanti

$$\begin{aligned} \mu(F) &\geq \mu((F \cap C) \cup (F \cap \bigcup_{n=0}^m D_n)) = \mu(F \cap C) + \mu(F \cap \bigcup_{n=0}^m D_n) \geq \\ &\geq \mu(F \cap C) + \mu(F \cap C^c) - \sum_{n>m} \mu(F \cap D_n) \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

Passando al limite per $m \rightarrow \infty$, il terzo addendo è infinitesimo e si ottiene la tesi per i sottoinsiemi chiusi. Siccome i boreliani sono la più piccola σ -algebra contenente i chiusi, il teorema è dimostrato. \square

Appendice B

Multifunzioni

Dati un insieme Ω , una σ -algebra \mathcal{A} e una misura μ su Ω finita (che supporremo di massa totale unitaria) ci chiediamo se per ogni famiglia (non necessariamente numerabile) di insiemi misurabili $\{A_i\}_{i \in I}$ esista un insieme misurabile A tale che siano soddisfatte le seguenti due condizioni:

- $A_i \subseteq_{q.o.} A$ per ogni $i \in I$
- Se $A_i \subseteq_{q.o.} A'$ per ogni $i \in I$, allora $A \subseteq_{q.o.} A'$

Per fare questo seguiremo essenzialmente [21] e [26] dimostrando l'esistenza di un fatto più generale.

B.1 Esistenza dell'estremo superiore essenziale di variabili aleatorie

Definizione B.1. Date due variabili aleatorie reali X e Y diciamo

$$X =_{q.o.} Y \stackrel{def}{\iff} \mu(\{X \neq Y\}) = 0$$

Si verifica che questa relazione è di equivalenza. Nel seguito però confonderemo spesso una variabile aleatoria X con la sua classe di equivalenza. Definiamo

$$X \leq_{q.o.} Y \stackrel{def}{\iff} \mu(\{X > Y\}) = 0$$

$\leq_{q.o.}$ induce una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva sulle classi di equivalenza della relazione appena definita.

B.1. Esistenza dell'estremo superiore essenziale di variabili aleatorie

Teorema B.2. *Sia data una famiglia $\{X_i\}_{i \in I}$ di variabili aleatorie definite su Ω . Allora esiste una variabile aleatoria reale U tale che*

1. $X_i \leq_{q.o.} U$
2. $X_i \leq_{q.o.} Y \implies U \leq_{q.o.} Y$

Inoltre U è unica per la relazione di equivalenza definita sopra e si può trovare un sottoinsieme numerabile J_0 di I tale che

$$U = \sup_{j \in J_0} X_j$$

Dimostrazione. Se l'insieme degli indici I è numerabile poniamo semplicemente $U = \sup_{i \in I} X_i$. Si verifica immediatamente che U soddisfa la tesi. Infatti si vede subito che $X_i \leq_{q.o.} U$. Inoltre poiché

$$\{Y < U\} = \bigcup_{i \in I} \{Y < X_i\}$$

si trova che

$$\mu(\{Y < U\}) \leq \sum_{i \in I} \mu(\{Y < X_i\}) = 0$$

da cui $U \leq_{q.o.} Y$.

Se l'insieme I non è numerabile sia $f : \overline{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$ continua e crescente (un omeomorfismo crescente di $\overline{\mathbf{R}}$ in un intervallo compatto di \mathbf{R}). Poniamo

$$M = \sup_J \int_{\Omega} f(\sup X_J) d\mu$$

al variare di J fra i sottoinsiemi numerabili di I . Abbiamo indicato con X_J la variabile aleatoria $\sup_{j \in J} X_j$. In realtà M è assunto: se J_n sono sottoinsiemi numerabili di I tali che

$$M - \sup_{J_n} \int_{\Omega} f(\sup X_{J_n}) d\mu < \frac{1}{n}$$

sia $J'_n = \cup_{1 \leq j \leq n} J_n$. Si ha allora, a maggior ragione dato che f è crescente,

$$M - \sup_{J'_n} \int_{\Omega} f(\sup X_{J'_n}) d\mu < \frac{1}{n}$$

Inoltre J'_n è numerabile e $J'_n \subseteq J'_{n+1}$. Ponendo allora

$$J_0 = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} J'_n$$

B.1. Esistenza dell'estremo superiore essenziale di variabili aleatorie

si vede che

$$M = \sup_{J_0} \int_{\Omega} f(\sup X_{J_0}) \, d\mu$$

Posto $U = X_{J_0}$, è immediato vedere che, se per ogni variabile aleatoria Y vale $X_i \leq_{q.o.} Y$ per ogni $i \in I$, allora $U \leq_{q.o.} Y$. Per completare la dimostrazione notiamo che, poiché J_0 realizza l'estremo superiore, per ogni $i \in I$

$$\int_{\Omega} f(\sup\{X_i, U\}) \, d\mu = \int_{\Omega} f(\sup U) \, d\mu = M$$

Quindi, per le proprietà dell'integrale e la crescenza di f , si ha $f(U) =_{q.o.} f(\sup\{X_i, U\})$ e poiché f è un omeomorfismo, $f(U) =_{q.o.} \sup\{X_i, U\}$, cioè $X_i \leq_{q.o.} U$. L'unicità di U segue immediatamente: se V gode delle stesse proprietà di U allora $U \leq_{q.o.} V$ e $V \leq_{q.o.} U$ da cui $U =_{q.o.} V$. \square

Adattando la dimostrazione precedente si prova il seguente teorema.

Teorema B.3. *Sia data una famiglia $\{X_i\}_{i \in I}$ di variabili aleatore definite su Ω . Allora esiste una variabile aleatoria reale L tale che*

1. $L \leq_{q.o.} X_i$ per ogni $i \in I$
2. $Y \leq_{q.o.} X_i$ per ogni $i \in I \implies Y \leq_{q.o.} L$

Inoltre L è unica per la relazione di equivalenza definita sopra e si può trovare un sottoinsieme numerabile J_0 di I tale che

$$U = \inf_{j \in J_0} X_j$$

Definizione B.4 (Estremo superiore e inferiore essenziale). Sia data una famiglia $\{X_i\}_{i \in I}$ di variabili aleatore definite su Ω . Allora

$$\mu\text{-ess sup}_{i \in I} X_i := U$$

$$\mu\text{-ess inf}_{i \in I} X_i := L$$

Dove U e L sono le funzioni dei teoremi B.2 e B.3.

Osservazione B.5. In particolare se $X_i = I_{A_i}$, la funzione caratteristica di A_i , risulta che

$$\mu\text{-ess sup}_{i \in I} X_i = \sup_{i \in J_0} X_i = I_A \text{ dove } A = \bigcup_{i \in J_0} A_i$$

e

$$\mu\text{-ess inf}_{i \in I} X_i = \inf_{i \in J_0} X_i = I_{A'} \text{ dove } A' = \bigcap_{i \in J_0} A_i$$

B.1. *Esistenza dell'estremo superiore essenziale di variabili aleatorie*

L'osservazione precedente ci permette di dare la seguente definizione.

Definizione B.6. Data una famiglia di insiemi $\{A_i\}_{i \in I}$ definiamo

$$\mu\text{-ess} \bigcup_{i \in I} A_i := A$$

$$\mu\text{-ess} \bigcap_{i \in I} A_i := A'$$

dove A e A' sono come nell'osservazione precedente. A e A' sono dette rispettivamente l'*unione essenziale* e l'*intersezione essenziale* della famiglia di insiemi $\{A_i\}_{i \in I}$.

Teorema B.7. *Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi e sia A la loro unione essenziale. Allora valgono le seguenti proprietà:*

1. $A_i \subseteq_{q.o.} A$ per ogni $i \in I$
2. Se $A_i \subseteq_{q.o.} B$ per ogni $i \in I$, allora $A \subseteq_{q.o.} B$
3. Esiste un sottoinsieme numerabile J_0 di I tale che $A = \bigcup_{i \in J_0} A_i$

Invece, se A' denota l'intersezione essenziale della famiglia di insiemi $\{A_i\}_{i \in I}$ allora

1. $A' \subseteq_{q.o.} A_i$ per ogni $i \in I$
2. Se $B' \subseteq_{q.o.} A_i$ per ogni $i \in I$, allora $B' \subseteq_{q.o.} A'$
3. Esiste un sottoinsieme numerabile J_0 di I tale che $A' = \bigcap_{i \in J_0} A_i$

Dimostrazione. Dimosteremo solo la prima parte della dimostrazione essendo la seconda del tutto analoga. Per le proprietà dell'estremo superiore essenziale di variabili aleatorie e per come è stata definita l'unione essenziale della famiglia di insiemi $\{A_i\}_{i \in I}$

$$I_{A_i} \leq_{q.o.} \mu\text{-ess} \sup_{i \in I} I_{A_i} = I_A \quad \text{per ogni } i \in I$$

da cui immediatamente

$$A_i \subseteq_{q.o.} A \quad \text{per ogni } i \in I$$

B.2. Esistenza dell'estremo superiore essenziale di multifunzioni

Per quanto riguarda il secondo punto se $A_i \subseteq_{q.o.} B$ per ogni $i \in I$, allora

$$I_{A_i} \leq_{q.o.} I_B \quad \text{per ogni } i \in I$$

Poiché I_A è l'estremo superiore essenziale della famiglia si trova che

$$I_A \leq_{q.o.} I_B \quad \text{per ogni } i \in I$$

da cui $A \subseteq_{q.o.} B$. Infine il terzo punto segue da quanto è stato scritto nell'osservazione B.5. \square

B.2 Esistenza dell'estremo superiore essenziale di multifunzioni

Ora vogliamo presentare un risultato sulle multifunzioni a valori nei chiusi di un spazio. Prima però definiamo cosa è una multifunzione.

Definizione B.8 (Multifunzioni). Siano E e F due insiemi. Una *multifunzione* da E a F è una applicazione

$$\Gamma : E \rightarrow 2^F$$

Il *grafico* della multifunzione Γ è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $E \times F$ definito da

$$\text{graph } \Gamma := \{(x, y) \in E \times F : y \in \Gamma(x)\}$$

Equivalentemente, una multifunzione si ottiene prendendo un sottoinsieme del prodotto $G = E \times F$ che corrisponde al suo grafico. Le definizioni sono equivalenti in base alla formula

$$\Gamma(x) = \{y \in F : (x, y) \in G\}$$

Talora se per ogni $x \in E$ si ha che $\Gamma(x) \in \mathcal{A}$ dove \mathcal{A} è un sottoinsieme fissato di 2^F , la multifunzione è detta a valori in \mathcal{A} . Molto spesso \mathcal{A} sarà l'insieme dei sottoinsiemi convessi e compatti di uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e separabile. Altre volte sarà il sottoinsieme dell'insieme delle parti di uno spazio topologico costituito dai chiusi.

Definizione B.9 (Sezione). Data una multifunzione Γ da E in F una *sezione* di Γ è una applicazione $f : E \rightarrow F$ tale che $f(x) \in \Gamma(x)$ per ogni $x \in E$. Una sezione nel senso che abbiamo definito non è altro che una sezione della mappa suriettiva $\pi : \text{graph } \Gamma \rightarrow E$, la proiezione del grafico di Γ su E .

B.2. *Esistenza dell'estremo superiore essenziale di multifunzioni*

Definizione B.10 (Scalare misurabilità). Una multifunzione Γ definita su uno spazio misurabile (Ω, \mathcal{A}) a valori nei sottoinsiemi convessi e compatti di uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e separabile è detta *scalarmente misurabile* se l'applicazione

$$\omega \mapsto \varphi(x', \Gamma(x)) = \sup \{ \langle x', x \rangle : x \in \Gamma(\omega) \}$$

è misurabile per ogni $x' \in E'$.

Non vogliamo approfondire troppo lo studio delle multifunzioni. I risultati che qui presentiamo sono essenziali per i nostri scopi, per stabilire alcune proprietà del piano tangente a una misura introdotto nel capitolo 5. Le dimostrazioni degli enunciati che qui presentiamo si possono trovare in [26] in forma più generale (la teoria viene sviluppata per spazi vettoriali topologici localmente convessi e separabili facendo uso della topologia di Mackey).

Proposizione B.11. *Sia Γ una multifunzione da (Ω, \mathcal{A}) in \mathbf{R}^N a valori nei sottoinsiemi convessi compatti di \mathbf{R}^N . Supponiamo inoltre che Γ sia scalarmente misurabile. Allora si può trovare una famiglia numerabile $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di sezioni scalarmente misurabili tali che*

$$\overline{\{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}} = \Gamma(\omega)$$

per ogni $\omega \in \Omega$.

Dimostrazione. La dimostrazione si può trovare in [26]. □

Se Γ e Σ sono multifunzioni a valori convessi compatti, possiamo introdurre la relazione d'ordine data da

$$\Gamma \leq \Sigma \iff \Gamma(\omega) \subseteq_{q.o.} \Sigma(\omega) \quad \text{per ogni } \omega \in \Omega$$

Proposizione B.12. *Sia Σ una multifunzione da (Ω, \mathcal{A}) in \mathbf{R}^N a valori nei sottoinsiemi convessi compatti di \mathbf{R}^N . Sia \mathcal{E} l'insieme delle multifunzioni Γ scalarmente misurabili a valori nei convessi compatti di \mathbf{R}^N tali che $\Gamma(\omega) \subseteq_{q.o.} \Sigma(\omega)$ per ogni $\omega \in \Omega$. Allora ogni sottoinsieme \mathcal{S} di \mathcal{E} ammette un estremo superiore Φ e un estremo inferiore Ψ che vengono detti rispettivamente estremo superiore essenziale e estremo inferiore essenziale di \mathcal{S} .*

B.2. Esistenza dell'estremo superiore essenziale di multifunzioni

Dimostrazione. Poniamo

$$\varphi(x^*, K) = \sup \{ \langle x, x^* \rangle : x \in K \}$$

$\{x^* \mapsto \varphi(x^*, K)\}$ è la funzione d'appoggio di K . Sia x_n^* una successione densa in \mathbf{R}^N . Grazie al teorema B.2, per ogni n possiamo trovare un sottoinsieme numerabile \mathcal{S}_n di \mathcal{S} tale che l'estremo superiore (essenziale) delle applicazioni

$$\{\omega \mapsto \varphi(x_n', \Gamma(\omega))\}$$

al variare di Γ in \mathcal{S}_n sia uguale all'estremo superiore essenziale della famiglia di applicazioni

$$\{\omega \mapsto \varphi(x_n', \Gamma(\omega))\}$$

al variare di Γ in \mathcal{S} . Poniamo allora

$$\Phi(\omega) := \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{ \Gamma(\omega) : \Gamma \in \mathcal{S}_n \} \right)$$

($\overline{\text{co}}(A)$ denota il più piccolo convesso chiuso contenente A). Φ è scalarmente misurabile poiché

$$\varphi(x', \Phi(\omega)) = \sup \{ \varphi(x', \Gamma(\omega)) : \Gamma \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{S}_n \}$$

Φ è la multifunzione cercata perché

$$\Gamma \leq \Lambda \quad \text{per ogni } \Gamma \in \mathcal{S} \implies \Phi \leq \Lambda$$

e $\Gamma \leq \Phi$ per ogni Γ in \mathcal{S} grazie al fatto che per ogni n e per quasi-ogni- ω

$$\varphi(x_n', \Phi(\omega)) \geq \varphi(x_n', \Gamma(\omega)) \quad \square$$

Per quanto riguarda l'esistenza di Ψ , è un fatto generale che se in un insieme ordinato ogni sottoinsieme ha un estremo superiore, allora ogni sottoinsieme ha anche un estremo inferiore.

Un enunciato analogo che non utilizza la convessità è il seguente.

Proposizione B.13. *Sia E uno spazio topologico metrizzabile e separabile. Sia \mathcal{E} lo spazio delle multiapplicazioni Γ da Ω a valori nei chiusi di E tali che l'insieme*

$$\Gamma^-(U) := \{ \omega \in \Omega : \Gamma(\omega) \cap U \neq \emptyset \}$$

B.2. Esistenza dell'estremo superiore essenziale di multifunzioni

sia misurabile per ogni aperto U di E . Allora ogni sottoinsieme \mathcal{S} di \mathcal{E} ammette un estremo superiore Φ e un estremo inferiore Ψ che vengono detti rispettivamente estremo superiore essenziale e estremo inferiore essenziale di \mathcal{S} .

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione densa in E . Consideriamo per ogni $p \geq 1$ la famiglia numerabile di palle aperte data da $\{B_{n,p}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dove $B_{n,p} = B(x_n, 1/p)$. Grazie al teorema B.2, per ogni n possiamo trovare un sottoinsieme numerabile \mathcal{S}_n di (S) tale che l'unione (essenziale) degli insiemi $\Gamma^-(B_{n,p})$ al variare di Γ in \mathcal{S}_n sia uguale all'unione essenziale degli insiemi $\Gamma^-(B_{n,p})$ al variare di Γ in \mathcal{S} . Definiamo allora

$$\Phi(\omega) = \overline{\bigcup \{\Gamma(\omega) : \Gamma \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n\}}$$

Abbiamo che $\Phi \in \mathcal{E}$, poiché se U è un aperto

$$\Phi^-(U) = \bigcup \{\Gamma^-(U) : \Gamma \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n\}$$

Chiaramente ogni maggiorante di \mathcal{S} è maggiore o uguale di Φ . Per vedere che Φ è un maggiorante di \mathcal{S} si prenda $\Gamma \in \mathcal{S}$. Per $p \geq 1$ e $\omega \in \Omega$ poniamo

$$J_p(\omega) = \{n \in \mathbb{N} : \omega \in \Gamma^-(B_{n,p})\}$$

e

$$\Gamma_p(\omega) = \bigcup \{B_{n,p} : n \in J_p(\omega)\}$$

Allora

$$\Gamma(\omega) = \bigcap_{p \geq 1} \Gamma_p(\omega)$$

Inoltre se poniamo

$$J'_p(\omega) = \{n \in \mathbb{N} : \omega \in \Phi^-(B_{n,p})\}$$

e

$$\Phi_p(\omega) = \bigcup \{B_{n,p} : n \in J'_p(\omega)\}$$

Avendo per ogni $n \in \mathbb{N}$ che l'insieme

$$\{\omega \in \Omega : n \in J_p(\omega)\} = \Gamma^-(B_{n,p})$$

è contenuto a meno di insiemi di misura nulla in

$$\Phi^-(B_{n,p}) = \{\omega \in \Omega : n \in J'_p(\omega)\}$$

segue che $\Gamma_p \subseteq_{q.o.} \Phi_p$ da cui $\Gamma \subseteq_{q.o.} \Phi$. □

Bibliografia

- [1] Luigi Ambrosio, *Lecture Notes on Optimal Transport Problems*, 2000, Lezioni tenute a Madeira (PT) alla Euro Summer School “Mathematical Aspects of Evolving Interfaces”, 2000, di prossima pubblicazione nella serie CIME Springer Lectures Notes.
- [2] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000. MR 1 857 292
- [3] Luigi Ambrosio and Paolo Tilli, *Selected Topics on Analysis on Metric Spaces*, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2000.
- [4] Béla Bollobás, *The optimal arrangement of producers*, J. London Math. Soc. (2) **6** (1973), 605–613.
- [5] Béla Bollobás and Nicholas Stern, *The optimal structure of market areas*, J. Econom. Theory **4** (1972), no. 2, 174–179.
- [6] Guy Bouchitté and Giuseppe Buttazzo, *Characterization of optimal shapes and masses through Monge-Kantorovich equation*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **3** (2001), no. 2, 139–168.
- [7] Guy Bouchitté, Giuseppe Buttazzo, and Pierre Seppecher, *Energies with respect to a measure and applications to low-dimensional structures*, Calc. Var. Partial Differential Equations **5** (1997), no. 1, 37–54.
- [8] ———, *Shape optimization solutions via Monge-Kantorovich equation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), no. 10, 1185–1191.
- [9] Guy Bouchitté and Gianni Dal Maso, *Integral representation and relaxation of convex local functionals on $BV(\Omega)$* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **20** (1993), no. 4, 483–533.

Bibliografia

- [10] Giuseppe Buttazzo, Edouard Oudet, and Eugene Stepanov, *Optimal transportation problems with free Dirichlet regions*, submitted paper (2002), 1–1.
- [11] Luis A. Caffarelli, Mikhail Feldman, and Robert J. McCann, *Constructing optimal maps for Monge’s transport problem as a limit of strictly convex costs*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 1, 1–26 (edizione elettronica).
- [12] Charles Castaing and Michel Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580.
- [13] Luigi De Pascale and Aldo Pratelli, *Regularity properties for Monge transport density and for solutions of some shape optimization problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations **14** (2002), no. 3, 249–274.
- [14] Ivar Ekeland and Roger Temam, *Convex analysis and variational problems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1976, Translated from the French, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 1.
- [15] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer*, Current developments in mathematics, 1997 (Cambridge, MA), Int. Press, Boston, MA, 1999, pp. 65–126.
- [16] Lawrence C. Evans and Wilfrid Gangbo, *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Mem. Amer. Math. Soc. **137** (1999), no. 653, viii+66.
- [17] Mikhail Feldman and Robert J. McCann, *Uniqueness and transport density in Monge’s mass transportation problem*, Calc. Var. Partial Differential **15** (2002), no. 1, 81–113.
- [18] Wilfrid Gangbo and Robert J. McCann, *The geometry of optimal transportation*, Acta Math. **177** (1996), no. 2, 113–161.
- [19] Frank Morgan, *Geometric Measure Theory*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988, A beginner’s guide.
- [20] Frank Morgan and Roger Bolton, *Hexagonal economic regions solve the location problem*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), no. 2, 165–172.

- [21] Jacques Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1970.
- [22] Svetlozar T. Rachev and Ludger Rüschendorf, *Mass Transportation Problems. Vol. I*, Springer-Verlag, New York, 1998, Theory.
- [23] ———, *Mass Transportation Problems. Vol. II*, Springer-Verlag, New York, 1998, Applications.
- [24] V. N. Sudakov, *Geometric problems in the theory of infinite-dimensional probability distributions*, Proc. Steklov Inst. Math. (1979), no. 2, i–v, 1–178, Traduzione di Trudy Mat. Inst. Steklov **141** (1976).
- [25] Neil S. Trudinger and Xu-Jia Wang, *On the Monge mass transfer problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations **13** (2001), no. 1, 19–31.
- [26] Michel Valadier, *Multi-applications mesurables à valeurs convexes compactes*, J. Math. Pures Appl. (9) **50** (1971), 265–297.