
Aufgaben zur Vorlesung
Wissenschaftliches Rechnen
WS 2009/2010 — Blatt 6

Abgabe: 26.11.2009 in der Vorlesung / per Email

Aufgabe 1 (A priori Fehlerschätzer für das Verfahren von Oden und Baumann) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, \mathcal{T}_h ein konformes Dreiecksgitter auf Ω , es sei $p = 2$ und das Laplace-Problem habe eine Lösung $u \in H^{p+1}(\Omega) \cap \dot{H}^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass der Fehler zwischen exakter Lösung und numerischer Lösung $u_h \in V_h^p$ aus dem LDG_6 -Verfahren folgende Fehlerabschätzung erfüllt:

$$|u - u_h|_{1,h} \leq Ch^p |u|_{p+1,\Omega}$$

Hierbei ist $|v|_{1,h}^2 := \sum_{e \in \mathcal{E}_{leaf}^0} |v|_{1,e}^2$. Hinweis: Verwenden Sie die Interpolierende und die Aussage von Blatt 5 Aufgabe 2.

Aufgabe 2 (Gleichungssystem zum $LDG(\hat{u}, \hat{\sigma})$ -Verfahren) (5 Punkte)

Das $LDG(\hat{u}, \hat{\sigma})$ -Verfahren führt im Fall von linearen Flüssen auf ein Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\sigma\sigma} & \mathbf{M}_{\sigma u} \\ \mathbf{M}_{u\sigma} & \mathbf{M}_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix},$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ und \mathbf{u} die Vektoren der Koeffizienten von u_h und σ_h in der Basisentwicklung sind.

- Führen Sie eine sogenannte Kondensation des Gleichungssystems durch, indem Sie $\boldsymbol{\sigma}$ eliminieren und das Gleichungssystem für \mathbf{u} angeben.
- Geben Sie die Einträge der Matrizen $\mathbf{M}_{\sigma\sigma}$, $\mathbf{M}_{\sigma u}$, $\mathbf{M}_{u\sigma}$ und \mathbf{M}_{uu} an.

Aufgabe 3 (LDG-Elementmatrizen in Dune, Fortsetzung folgt) (6 Punkte)

Schreiben Sie drei Routinen, die die Matrizen mit den Einträgen $\int_e \psi_i \cdot \psi_j$, $\int_e \varphi_i \nabla \cdot \psi_j$ und $\int_e \psi_i \cdot \nabla \varphi_j$ für ein gegebenes Element $e \in \mathcal{E}_{leaf}^0$ und diskrete Funktionenräume $\text{span}\{\varphi_i\} = P_p(e)$ und $\text{span}\{\psi_i\} = [P_q(e)]^n$ berechnen. Die Routinen sollen als Argumente das Gitter-Entity e , die notwendigen Funktionenräume und die Quadratur annehmen und die berechneten Matrizen in beliebigem Format zurückliefern.