

---

Aufgaben zur Vorlesung  
**Wissenschaftliches Rechen**  
 WS 2009/2010 — Blatt 6

---

**Abgabe:** 26.11.2009 in der Vorlesung / per Email

**Aufgabe 1** (A priori Fehlerschätzer für das Verfahren von Oden und Baumann)(5 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{T}_h$  ein konformes Dreiecksgitter auf  $\Omega$ , es sei  $p = 2$  und das Laplace-Problem habe eine Lösung  $u \in H^{p+1}(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ . Zeigen Sie, dass der Fehler zwischen exakter Lösung und numerischer Lösung  $u_h \in V_h^p$  aus dem  $LDG_6$ -Verfahren folgende Fehlerabschätzung erfüllt:

$$|u - u_h|_{1,h} \leq Ch^p |u|_{p+1,\Omega}$$

Hierbei ist  $|v|_{1,h}^2 := \sum_{e \in \mathcal{E}_{leaf}^0} |v|_{1,e}^2$ . Hinweis: Verwenden Sie die Interpolierende und die Aussage von Blatt 5 Aufgabe 2.

**Aufgabe 2** (Gleichungssystem zum  $LDG(\hat{u}, \hat{\sigma})$ -Verfahren) (5 Punkte)

Das  $LDG(\hat{u}, \hat{\sigma})$ -Verfahren führt im Fall von linearen Flüssen auf ein Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\sigma\sigma} & \mathbf{M}_{\sigma u} \\ \mathbf{M}_{u\sigma} & \mathbf{M}_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix},$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\mathbf{u}$  die Vektoren der Koeffizienten von  $u_h$  und  $\sigma_h$  in der Basisentwicklung sind.

- Führen Sie eine sogenannte Kondensation des Gleichungssystems durch, indem Sie  $\boldsymbol{\sigma}$  eliminieren und das Gleichungssystem für  $\mathbf{u}$  angeben.
- Geben Sie die Einträge der Matrizen  $\mathbf{M}_{\sigma\sigma}$ ,  $\mathbf{M}_{\sigma u}$ ,  $\mathbf{M}_{u\sigma}$  und  $\mathbf{M}_{uu}$  an.

**Aufgabe 3** (LDG-Elementmatrizen in Dune, Fortsetzung folgt) (6 Punkte)

Schreiben Sie drei Routinen, die die Matrizen mit den Einträgen  $\int_e \psi_i \cdot \psi_j$ ,  $\int_e \varphi_i \nabla \cdot \psi_j$  und  $\int_e \psi_i \cdot \nabla \varphi_j$  für ein gegebenes Element  $e \in \mathcal{E}_{leaf}^0$  und diskrete Funktionenräume  $\text{span}\{\varphi_i\} = P_p(e)$  und  $\text{span}\{\psi_i\} = [P_q(e)]^n$  berechnen. Die Routinen sollen als Argumente das Gitter-Entity  $e$ , die notwendigen Funktionenräume und die Quadratur annehmen und die berechneten Matrizen in beliebigem Format zurückliefern.