Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Mario Ohlberger, René Milk

05.11.2009

Aufgaben zur Vorlesung

Wissenschaftliches Rechen

WS 2009/2010 — Blatt 4

Abgabe: 12.11.2009 in der Vorlesung / per Email

Aufgabe 1 (Abschätzung auf Randelementen) (6 Punkte)

Sei $\mathcal{T}_h$ ein hierarchisches Gitter auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $h_e := \operatorname{diam}(e)$ der Durchmesser von Entitäten beliebiger Kodimension. Das Gitter erfülle eine Geometriebedingung, indem $c_1, C_1 > 0$ existieren, so dass gilt

$$\begin{aligned} c_1 h_{e^1} &\leq \|DF_{e^0}(\hat{\mathbf{x}})\| \leq C_1 h_{e^1} && \text{und} \\ c_1 h_{e^1}^d &\leq |\det DF_{e^0}(\hat{\mathbf{x}})| \leq C_1 h_{e^1}^d && \text{für alle } \hat{\mathbf{x}} \in e^0 \in \mathcal{E}^0_{leaf}, e^1 \subset \partial e^0, e^1 \in \mathcal{E}^1_{leaf}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für $w \in H^2(e^0), e^0 \in \mathcal{E}^0_{leaf}, e^1 \subset \partial e^0, e^1 \in \mathcal{E}^1_{leaf}$ mit einer von e^1 unabhängigen Konstanten C gilt

$$\|\nabla w \cdot \mathbf{n}\|^2_{0,e^1} \leq C \left(h_{e^1}^{-1} |w|^2_{1,e^0} + h_{e^1} |w|^2_{2,e^0} \right).$$

Setzen Sie hierbei zur Vereinfachung voraus, dass die Referenzabbildungen F_{e^0} affin sind.

Aufgabe 2 (Eigenschaften der LDG-Flüsse) (4 Punkte)

Führen Sie mit entsprechender Begründung eine Klassifikation der Flüsse in den Verfahren LDG_1 bis LDG_9 nach ihrer Konsistenz und Erhaltungseigenschaft durch.

Aufgabe 3 (Konvergenz von DG-Verfahren höherer Ordnung) (6 Punkte)

Der EOC (experimental order of convergence) eines numerischen Verfahrens zur Gitterweite h ist definiert durch $\mathrm{EOC}(h) := \ln(\|u_h - u\| / \|u_{h/2} - u\|)/\ln 2$. Bestimmen Sie basierend auf demselben numerischen Problem und Ihrer Lösung der Aufgabe 2 von Blatt 3 (welche Sie im Rahmen dieser Aufgabe noch nachreichen können) für die Polynomgrade $p = 1, 2, 3$ jeweils eine Tabelle mit EOC-Werten, indem Sie $h = 1/50, 1/100, 1/200, 1/400$ wählen.