Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Mario Ohlberger, René Milk 22.10.2009

Aufgaben zur Vorlesung

Wissenschaftliches Rechen

WS 2009/2010 — Blatt 2

Abgabe: 29.10.2009 in der Vorlesung / per Email

Aufgabe 1 (DG-Verfahren für Legendre-Basen) (4 Punkte)

Wir betrachten das Laplace-Problem auf $\Omega = [0, Nh] \subset \mathbb{R}$, welches auf einem äquidistanten Gitter mit N Zellen diskretisiert ist, d.h. $T_i := [(i-1)h, ih]$ für $i = 1, \ldots, N$. Die Legendre-Basis von $P_1(\hat{T})$ auf dem Referenzelement $\hat{T} = [0, 1]$ lautet $\hat{\varphi}_1(x) = 1, \hat{\varphi}_2(x) = x - \frac{1}{2}$. Wir betrachten den diskreten Lösungsraum, der von den Funktionen $\varphi_{2i-1} := \varphi_1^{T_i}$ und $\varphi_{2i} := \varphi_2^{T_i}$ für $i = 1, \ldots, N$ aufgespannt wird. Das DG-Verfahren mit Bilinearform

$$B_{\alpha,\beta}(v, w) := \sum_T \int_T \nabla v \cdot \nabla w + \sum_{S \in \mathcal{I} \cup \mathcal{I}_\partial} \int_S (\{\nabla v\}[w] - \alpha[v]\{\nabla w\} + \beta/h_S[v][w]) \qquad (1)$$

und $h_S = h$ führt auf ein Gleichungssystem $\mathbf{Bu} = \mathbf{f}$ für die DOFs $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{2N})^T$. Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{B}$ in Abhängigkeit von α, β und h.

Aufgabe 2 (Konsistenz des DG-Verfahrens) (4 Punkte)

Wir betrachten das durch (1) induzierte DG-Verfahren für das Laplace-Problem auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Die Daten und Ω seien derart regulär, dass eine Lösung $u \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ existiert.

a) Zeigen Sie, dass für $\alpha = 1$, $\beta > 0$ gilt

$$\begin{aligned} & u \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega) \text{ erfüllt } -\Delta u = f \text{ in } \Omega, u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \\ \Leftrightarrow \quad & u \in H^2(\mathcal{T}_h) \text{ erfüllt } B_{\alpha,\beta}(u, \varphi) = I(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^2(\mathcal{T}_h). \end{aligned} \qquad (2)$$

* b) Zeigen Sie, dass (2) gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$ und genügend großem β.

Aufgabe 3 (Vergleich Lagrange/Legendre Basen in DG-Verfahren) (4 Punkte)

Entpacken Sie die Dateien in dem Archiv `dgcode.tgz`. Hinweise zur Kompilation und zu den Kommandozeilenparametern des Hauptprogramms finden Sie in der `readme`-Datei.

a) Erstellen Sie für Problem-Nummer 2 sowohl mit dem symmetrischen DG-Verfahren $\alpha = -1$, $\beta = 2$ als auch den nichtsymmetrischen Verfahren $\alpha = 1$, $\beta = 1$ und $\alpha = 1$, $\beta = 10$ eine Tabelle der resultierenden Iterationszahlen und L^2-Fehler bei Variation von $N = 100, 200, 400, 800, 1600$.

b) Modifizieren Sie das Programm `rwp.cc`, so dass diskrete Funktionen mit lokalen Legendre Basen statt den Lagrange-Basen verwendet werden. Hierzu sind in den diskreten Funktionen entsprechende Methoden zu ändern und die Multiplikation mit der Matrix aus Aufgabe 1 zu implementieren.

c) Erstellen Sie für denselben Parameterbereich wie in a) Tabellen für das DG-Verfahren mit Legendre-Basisfunktionen.

Aufgabe 4 (CRS Block Matrizen) (4 Punkte)

Schreiben Sie eine Klasse `CRSBlockMatrix` mit einem Template Parameter `BlockType`. Die Klasse soll eine Compressed Row Storage Block Matrix repräsentieren, d.h. eine Matrix, bei der die Einträge selbst Matrizen sind. Die Klasse soll einige Methoden besitzen, unter anderem Setzen von Blöcken und Multiplikation mit einem Vektor, so dass das Programm `matrix_test.cc` hiermit funktionsfähig wird. Hierbei kann vorausgesetzt werden, dass der entsprechenden Zuweisungsoperator und die Multiplikationsmethode auf der BlockTyp Matrix-Klasse verfügbar sind, wie sie z.B. in der `DenseMatrix` Klasse realisiert sind. Bestimmen Sie den Speicher- und Laufzeitgewinn für die Matrix-Vektor-Multiplikation.