Parameterfreie Schätzung des Drift- und Diffusionskoeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung

Zwischenvortrag zum Seminar „Nichtlineare Modellierung in den Naturwissenschaften"

Münster, 19. Juni 2011

Jan Henrik Wosnitza

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Agenda

Einführung

Theorie der Markov-Prozesse

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung aus synthetischen Zeitreihen

Zusammenfassung und Ausblick

Einführung

Intrinsisches Rauschen als Charakteristikum vieler komplexer Systeme, wie z.B. Kapitalmärkte oder Wettersysteme

Darstellung einer nichtparametrischen Methode zur Trennung von Trend und Fluktuationen des zugrunde liegenden stochastischen Prozesses

Bestimmung einer partiellen Differential Gleichung (Fokker-Planck Gleichung) zur Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsdichte *p(q,t)* auf Basis empirischer Daten

Agenda

Einführung

Theorie der Markov-Prozesse

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung aus synthetischen Zeitreihen

Zusammenfassung und Ausblick

Theorie der Markov-Prozesse

Multivariate Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$p(q_2, t_2; q_1, t_1);\ p(q_2, t_2; q_1, t_1) \cdot dq_2 \cdot dq_1$$

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$p(q_2, t_2 | q_1, t_1) = \frac{p(q_2, t_2; q_1, t_1)}{p(q_1, t_1)}$$

$$p(q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1}, \ldots, q_1, t_1) = \frac{p(q_N, t_N; q_{N-1}, t_{N-1}; \ldots; q_1, t_1)}{p(q_{N-1}, t_{N-1}; \ldots; q_1, t_1)}$$

Markov-Eigenschaft:

$$p(q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1}, \ldots, q_1, t_1) = p(q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1})$$

Theorie der Markov-Prozesse

Kramers-Moyal Entwicklung:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(q,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial q}\right)^{n} \left[D^{(n)}(q,t) \cdot p(q,t)\right]$$

Kramers-Moyal Koeffizienten:

$$D^{(n)}(q,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t \cdot n!} \cdot \left\langle \left(q(t+\Delta t) - q(t)\right)^{n} \middle| q(t) \right\rangle$$

Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(q,t) = \left[-\frac{\partial}{\partial q} D^{(1)}(q,t) + \frac{\partial^2}{\partial q^2} D^{(2)}(q,t)\right] \cdot p(q,t)$$

Driftkoeffizient: $D^{(1)}(q,t)$

Diffusionskoeffizient: $D^{(2)}(q,t)$

Theorie der Markov-Prozesse

Langevin Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t) = D^{(1)}(q,t) + \sqrt{D^{(2)}(q,t)} \cdot F(t)$$

$$\langle F(t) \rangle = 0$$

$$\langle F(t) \cdot F(t') \rangle = 2 \cdot \delta(t - t')$$

Agenda

Einführung

Theorie der Markov-Prozesse

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung aus synthetischen Zeitreihen

Zusammenfassung und Ausblick

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung aus synthetischen Zeitreihen

Generierung einer synthetischen Zeitreihe:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t) = D^{(1)}(q,t) + \sqrt{D^{(2)}(q,t)} \cdot F(t)$$

$$\Leftrightarrow q(t+\Delta t) = \Delta t \cdot D^{(1)}(q,t) + \sqrt{\Delta t \cdot D^{(2)}(q,t)} \cdot F(t) + q(t)$$

Überprüfung der Markov-Eigenschaft:

$$p(q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1}) = p(q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1}; q_{N-2} = 0, t_{N-2})$$

Bestimmung der Kramers-Moyal Koeffizienten der Ordnung eins, zwei und vier aus der synthetischen Zeitreihe:

$$D^{(n)}(q,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t \cdot n!} \cdot \left\langle \left(q(t+\Delta t) - q(t) \right)^n \middle| q(t) \right\rangle$$

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung aus synthetischen Zeitreihen

Generierung des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses:

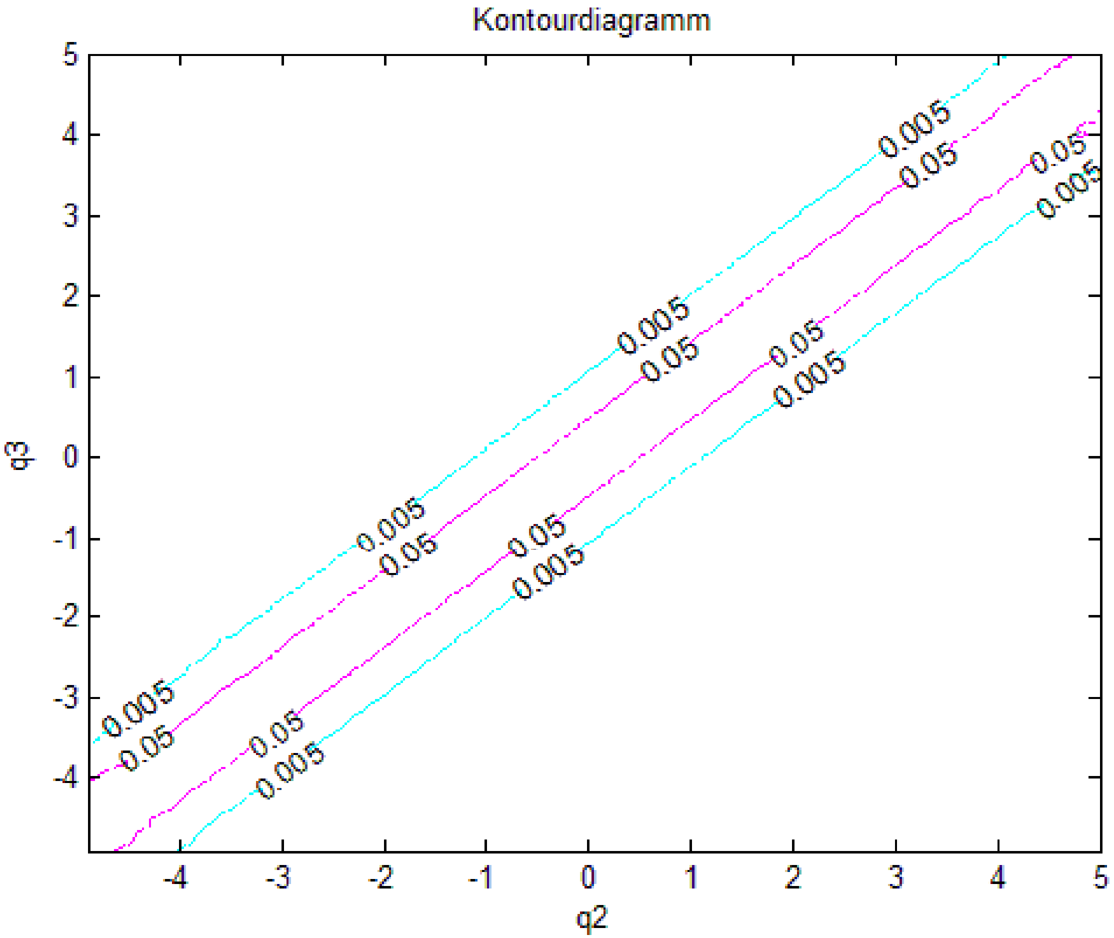
$$q(t + \Delta t) = -\frac{q(t)}{2} + \sqrt{\Delta t} \cdot F(t) + q(t)$$

$$D^{(1)}(q, t)) = -\frac{q(t)}{2}$$

$$D^{(2)}(q, t)) = 1$$

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung aus synthetischen Zeitreihen

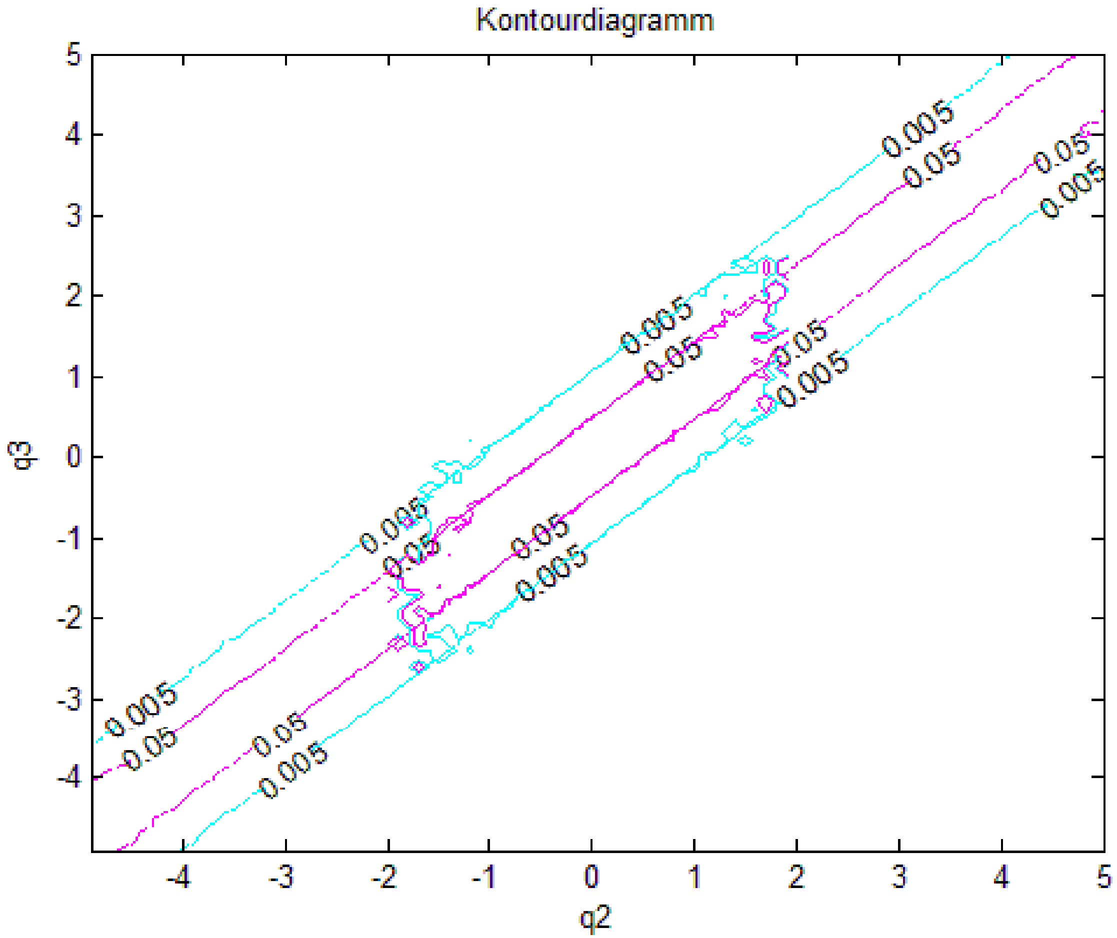
$p(q_3, t_3 | q_2, t_2)$



Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung aus synthetischen Zeitreihen

$$p(q_3, t_3 | q_2, t_2; q_1 = 0, t_1)$$

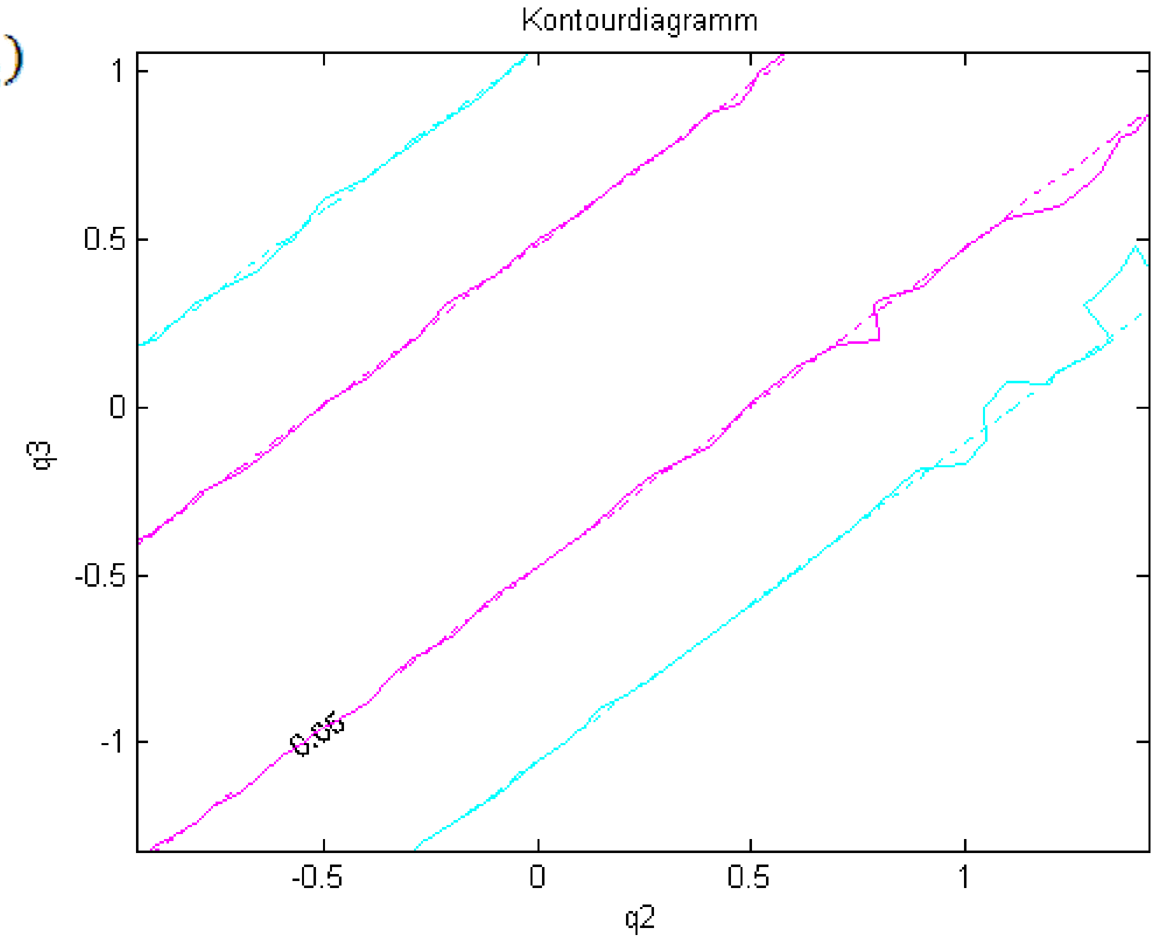
$$p(q_3, t_3 | q_2, t_2)$$



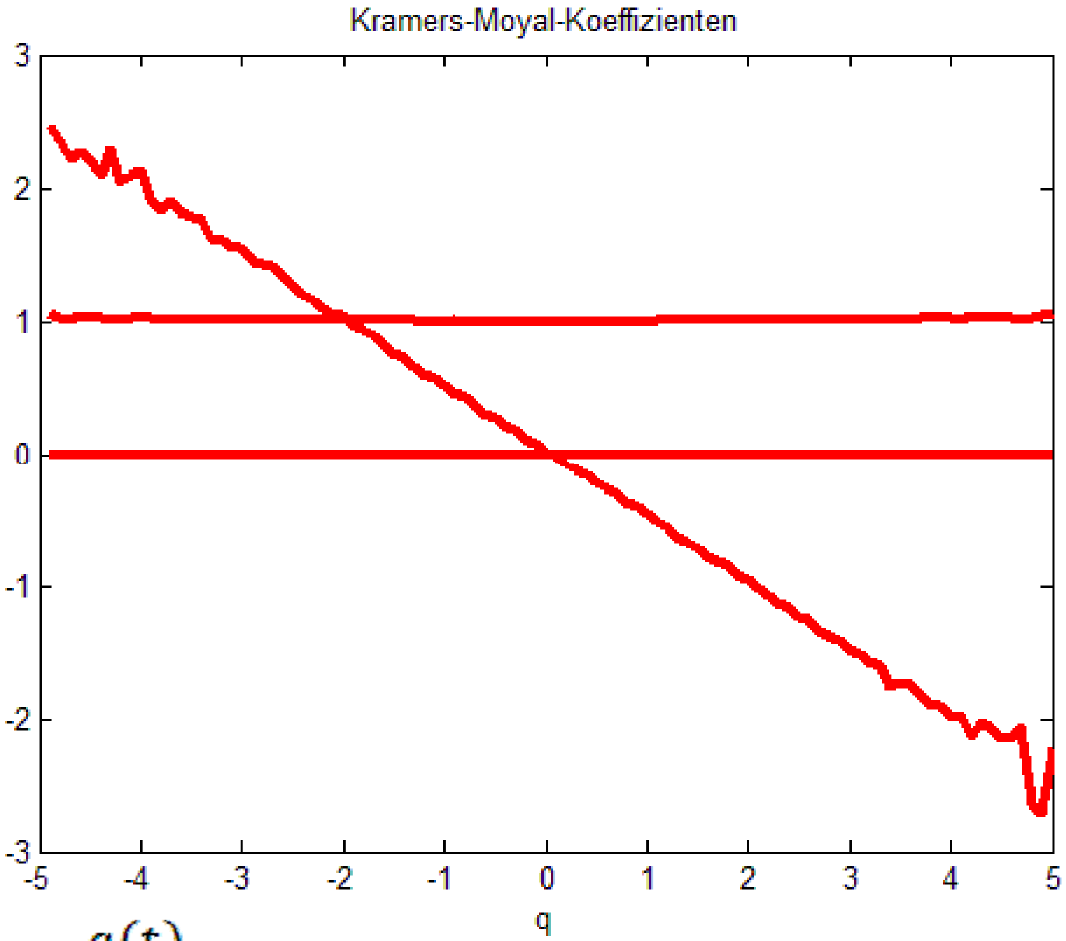
Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung aus synthetischen Zeitreihen

$p(q_3, t_3 | q_2, t_2; q_1 = 0, t_1)$

$p(q_3, t_3 | q_2, t_2)$



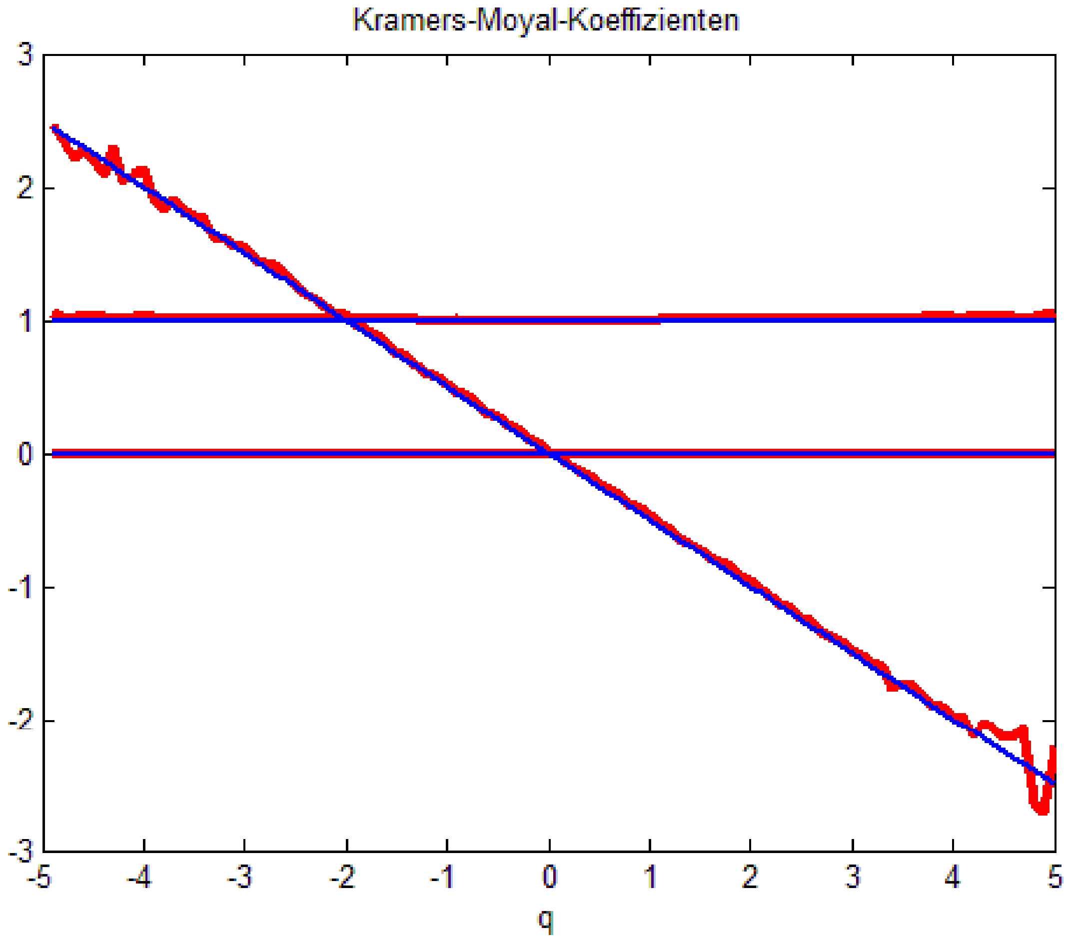
Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung aus synthetischen Zeitreihen



$$q(t+\Delta t) = -\frac{q(t)}{2} + \sqrt{\Delta t} \cdot F(t) + q(t)$$

$$D^{(n)}(q,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t \cdot n!} \cdot \left\langle \left(q(t+\Delta t) - q(t)\right)^n \middle| q(t) \right\rangle$$

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung aus synthetischen Zeitreihen



$$q(t+\Delta t) = -\frac{q(t)}{2} + \sqrt{\Delta t} \cdot F(t) + q(t)$$

Agenda

Einführung

Theorie der Markov-Prozesse

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung aus synthetischen Zeitreihen

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung und Ausblick

Anwendung der vorgestellten Methode auf synthetische Daten mit bekanntem Ergebnis

Trennung von Trend und Fluktuationen bei realen Daten

Reale Daten genügen bei kleinem Δt häufig nicht der Markov-Eigenschaft

Reale Daten stehen nur in begrenzter Anzahl zur Verfügung $\approx 10^4$ bis 10^6

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Theorie der Markov-Prozesse

Back up

Markov-Eigenschaft:

$$p(q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1}, \dots, q_1, t_1) = p(q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1})$$

Folgerungen aus der Markov-Eigenschaft:

$$\begin{aligned} p(q_N, t_N; q_{N-1}, t_{N-1}; \dots; q_1, t_1) &= p(q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1}, \dots, q_1, t_1) \cdot p(q_{N-1}, t_{N-1}; \dots; q_1, t_1) \\ &= p(q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1}) \cdot p(q_{N-1}, t_{N-1}; \dots; q_1, t_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(q_{N-1}, t_{N-1}; q_{N-2}, t_{N-2}; \dots; q_1, t_1) &= p(q_{N-1}, t_{N-1} | q_{N-2}, t_{N-2}, \dots, q_1, t_1) \cdot p(q_{N-2}, t_{N-2}; \dots; q_1, t_1) \\ &= p(q_{N-1}, t_{N-1} | q_{N-2}, t_{N-2}) \cdot p(q_{N-2}, t_{N-2}; \dots; q_1, t_1) \end{aligned}$$

$$p(q_N, t_N; q_{N-1}, t_{N-1}; \dots; q_1, t_1) = p(q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1}) \cdot \dots \cdot p(q_2, t_2 | q_1, t_1) \cdot p(q_1, t_1)$$