Empirische Bestimmung von Drift- und Diffusionskoeffizient für DAX-Kursdifferenzen

Vortrag zum Seminar „Nichtlineare Modellierung in den Naturwissenschaften"

Münster, 11. Juli 2011

Jan Henrik Wosnitza

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Agenda

Einführung

Theorie der Markov-Prozesse

Vorstellung des Datensatzes

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen

Fazit

Einführung

Darstellung einer verteilungsunabhängigen Methode zur Schätzung des zugrunde liegenden stochastischen Prozesses

Intrinsisches Rauschen als Charakteristikum vieler komplexer Systeme (Kapitalmärkte oder Wettersysteme)

Verteilungsunabhängige Bestimmung einer partiellen Differential Gleichung (Fokker-Planck Gleichung) zur Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(q,t)$

Agenda

- Einführung
- **Theorie der Markov-Prozesse**
- Vorstellung des Datensatzes
- Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen
- Fazit

Theorie der Markov-Prozesse

Markov Prozess $\Rightarrow$ Kramers-Moyal Entwicklung:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(q,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial q}\right)^n \left[D^{(n)}(q,t) \cdot p(q,t)\right]$$

Kramers-Moyal Koeffizienten:

$$D^{(n)}(q,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t}{\Delta t \cdot n!} \cdot \left\langle \left(q(t+\Delta t) - q(t)\right)^n \middle| q(t) \right\rangle$$

Pawula Theorem $\Rightarrow$ Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(q,t) = \left[-\frac{\partial}{\partial q} D^{(1)}(q,t) + \frac{\partial^2}{\partial q^2} D^{(2)}(q,t) \cdot\right] p(q,t)$$

Drift-Term: $D^{(1)}(q,t)$

Diffusions-Term: $D^{(2)}(q,t)$

Theorie der Markov-Prozesse

Langevin Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t) = D^{(1)}(q,t) + \sqrt{D^{(2)}(q,t)} \cdot F(t)$$

Agenda

Einführung

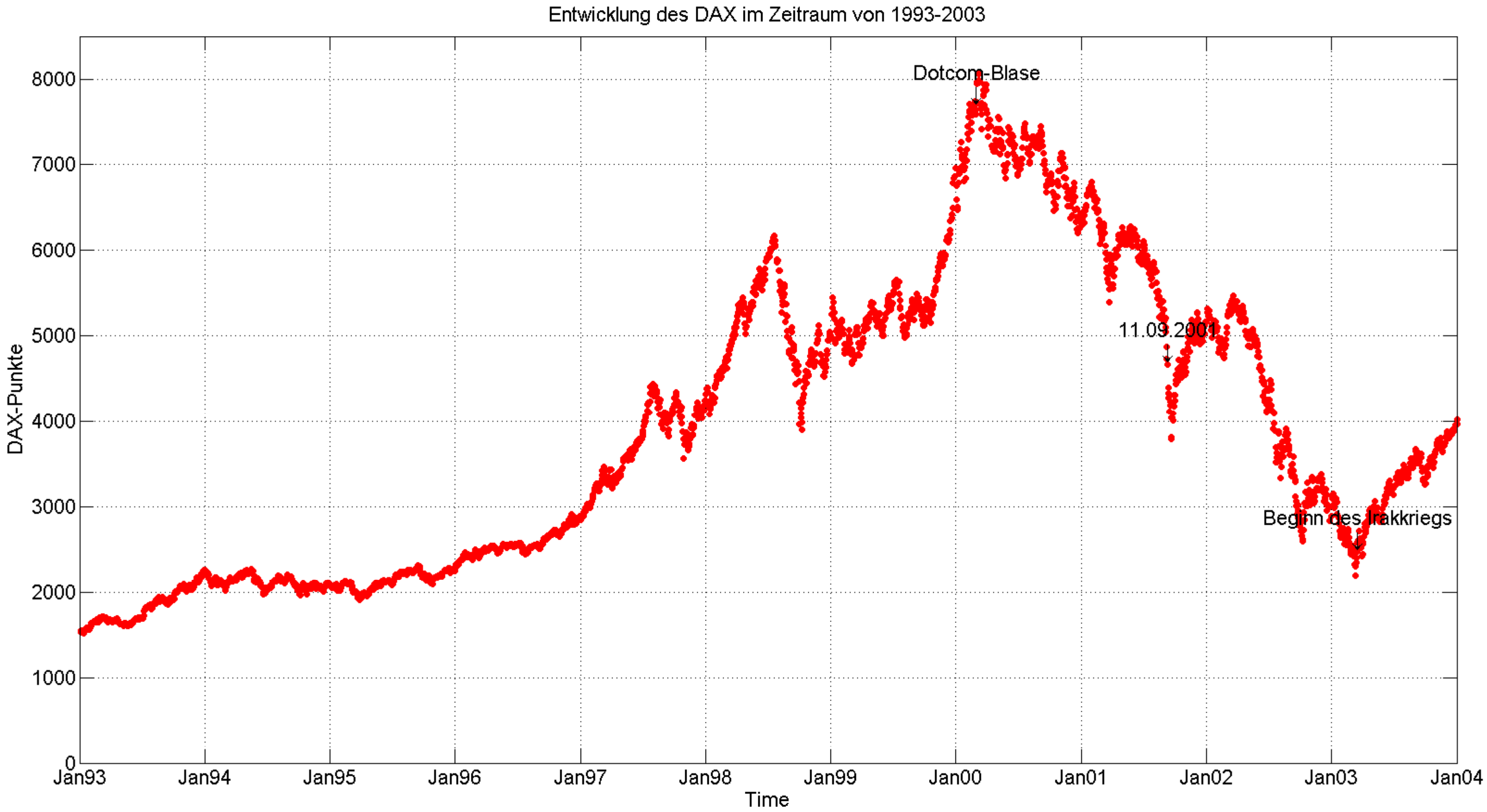
Theorie der Markov-Prozesse

Vorstellung des Datensatzes

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen

Fazit

Vorstellung des Datensatzes



Anzahl Datenpunkte: 3.925.213 $\approx 4 \cdot 10^6$

Sampling Rate: 15 sec

$q = log[K(t+1)/K(t)]$

Agenda

Einführung

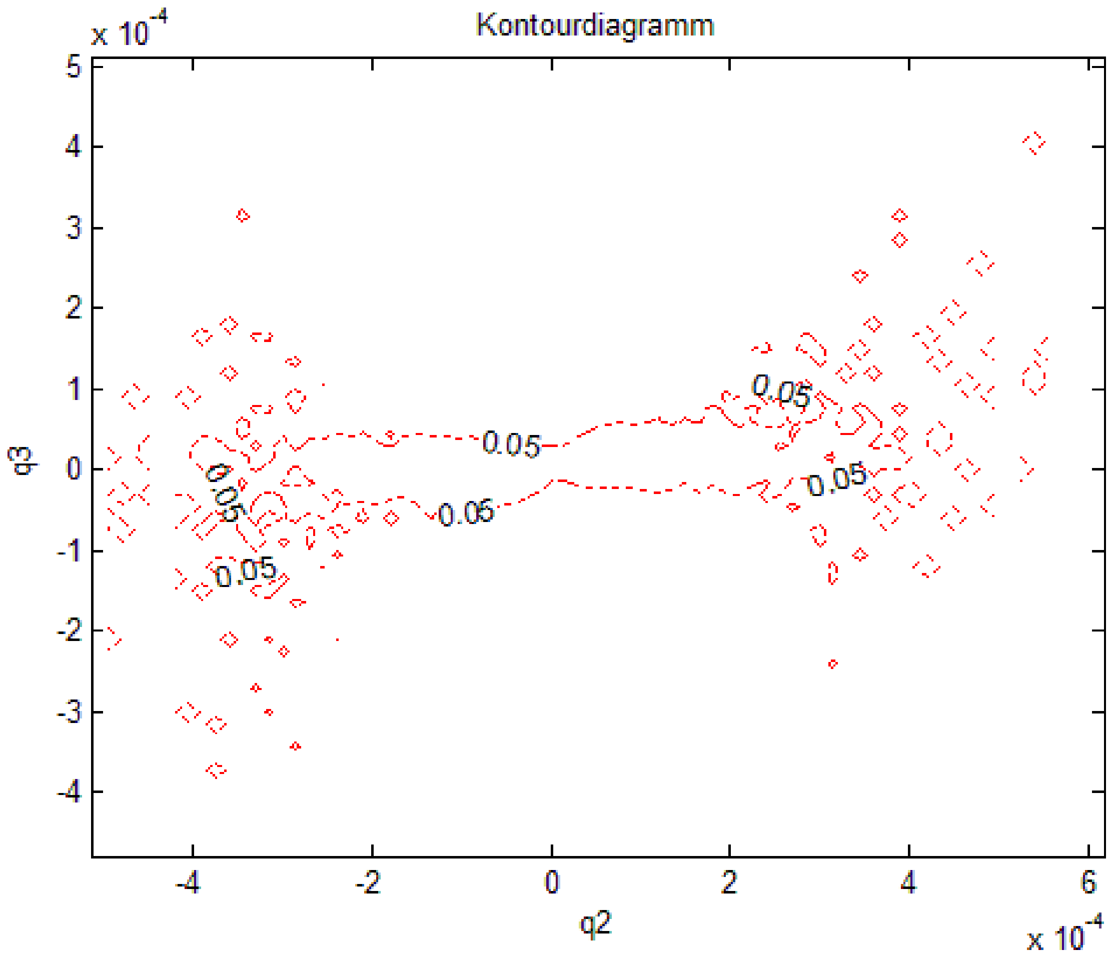
Theorie der Markov-Prozesse

Vorstellung des Datensatzes

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen

Fazit

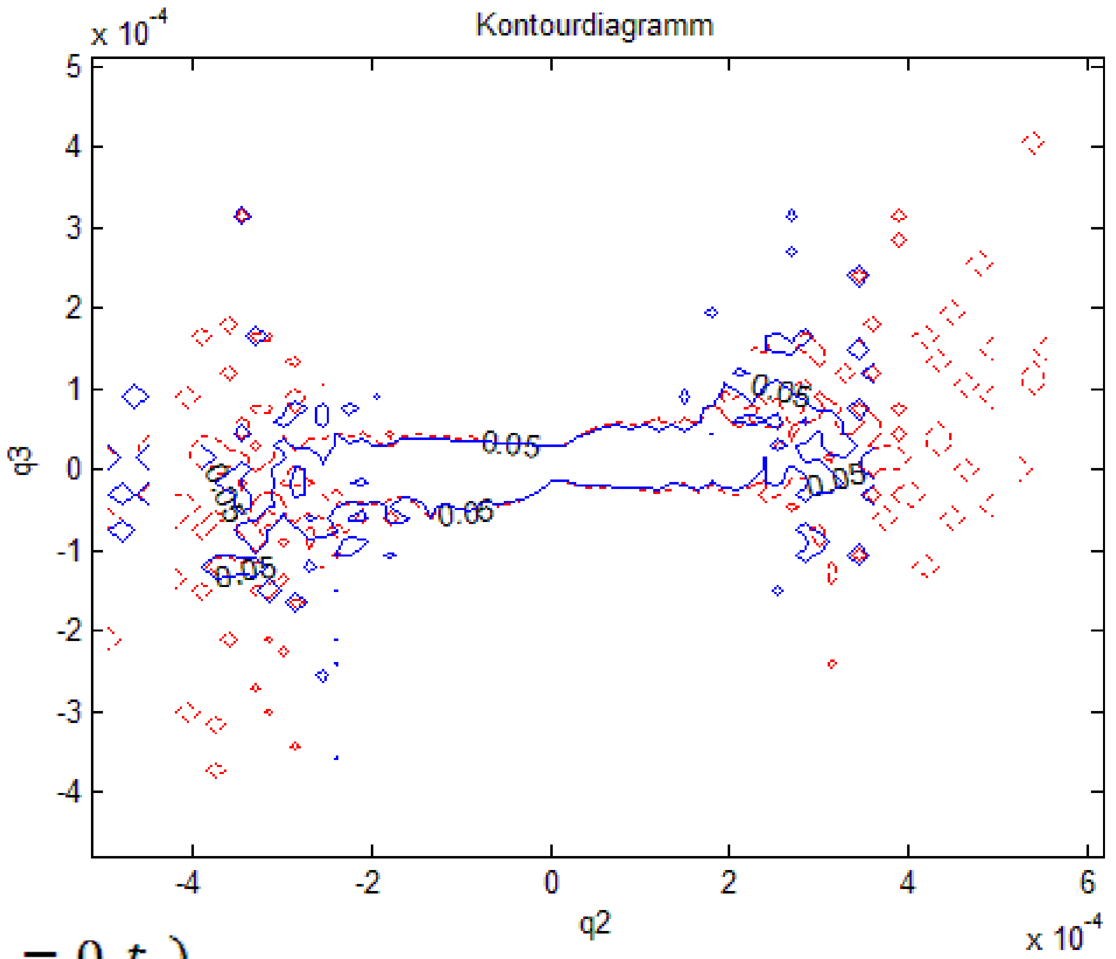
Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen



$p(q_3, t_3 | q_2, t_2)$

$t_3 = 45s,\ t_2 = 30s$

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen

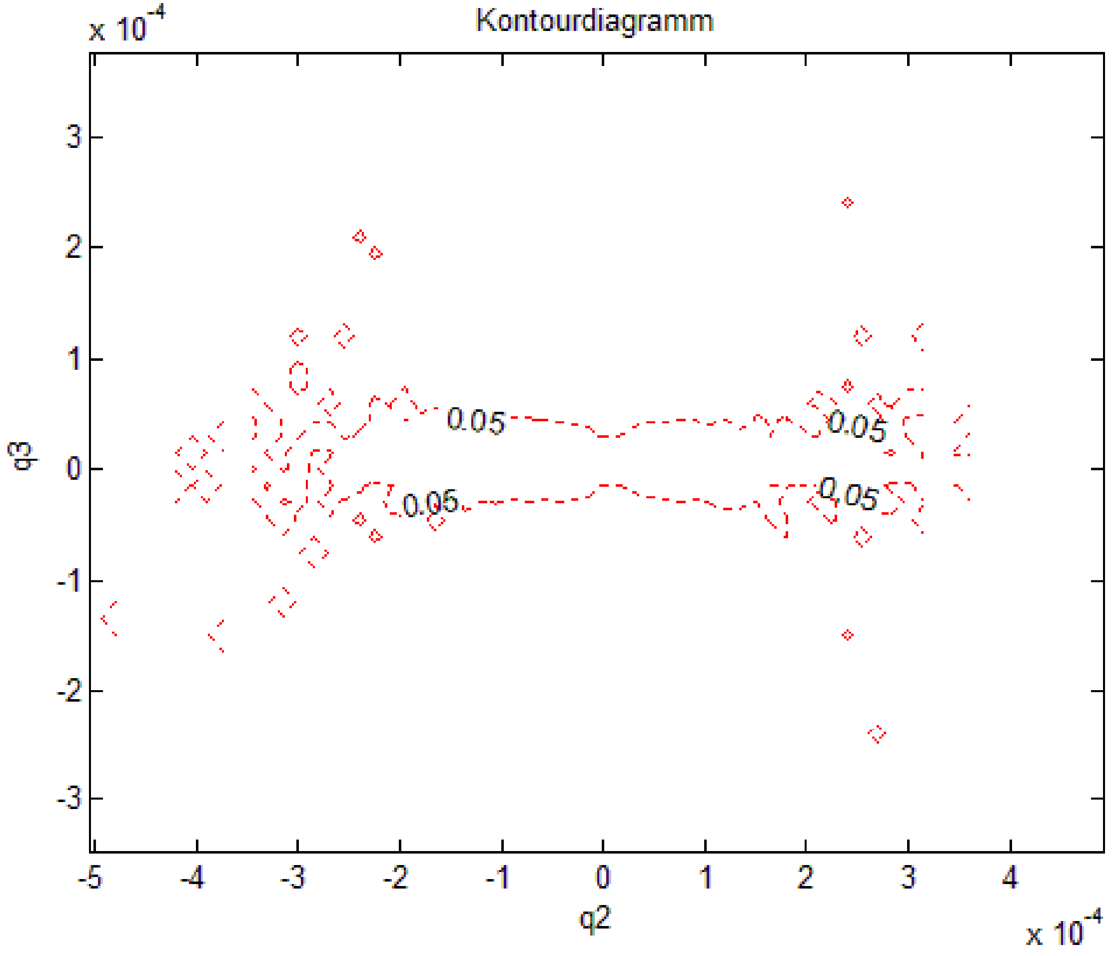


$p(q_3, t_3 | q_2, t_2; q_1 = 0, t_1)$

$p(q_3, t_3 | q_2, t_2)$

t_3 = 45s, t_2 = 30s, t_1 = 15s

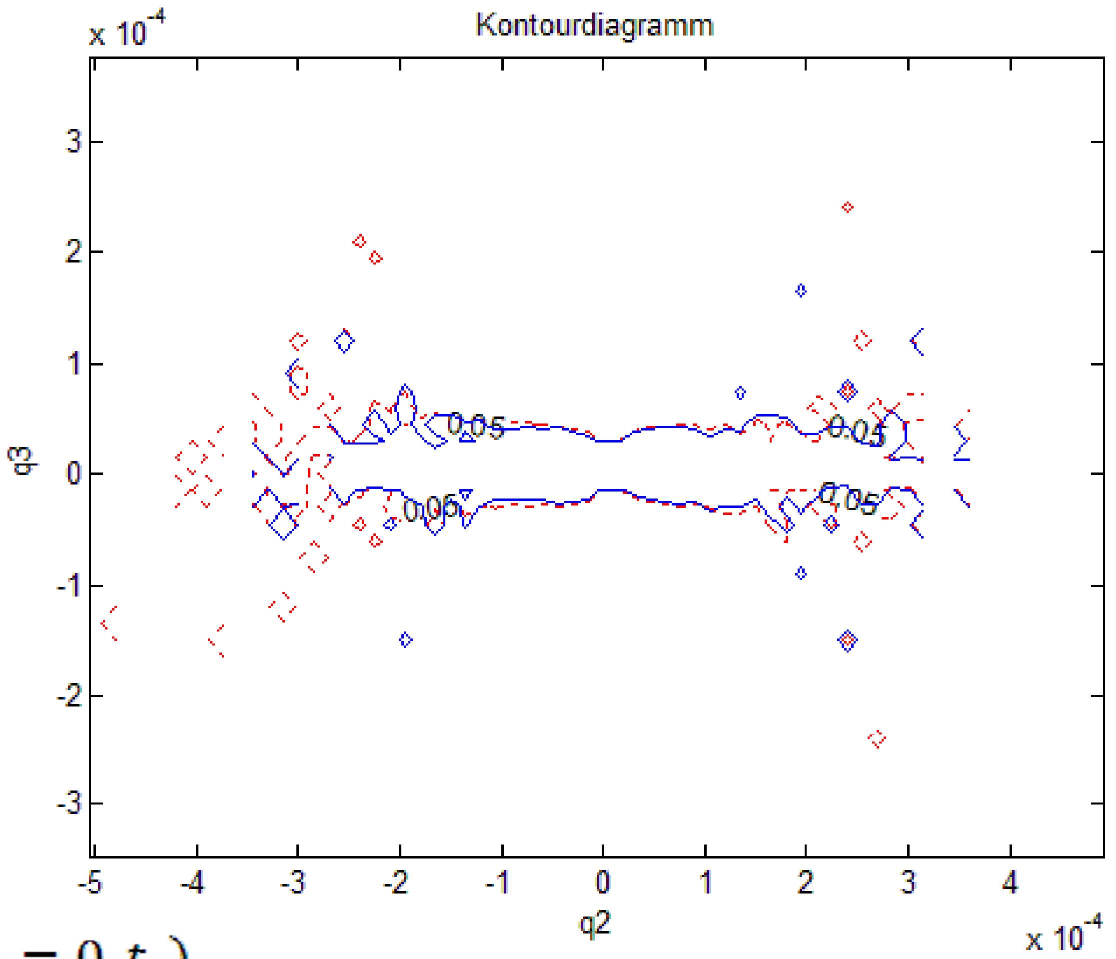
Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen



$p(q_3, t_3 | q_2, t_2)$

$t_3 = 3min,\ t_2 = 2min$

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen



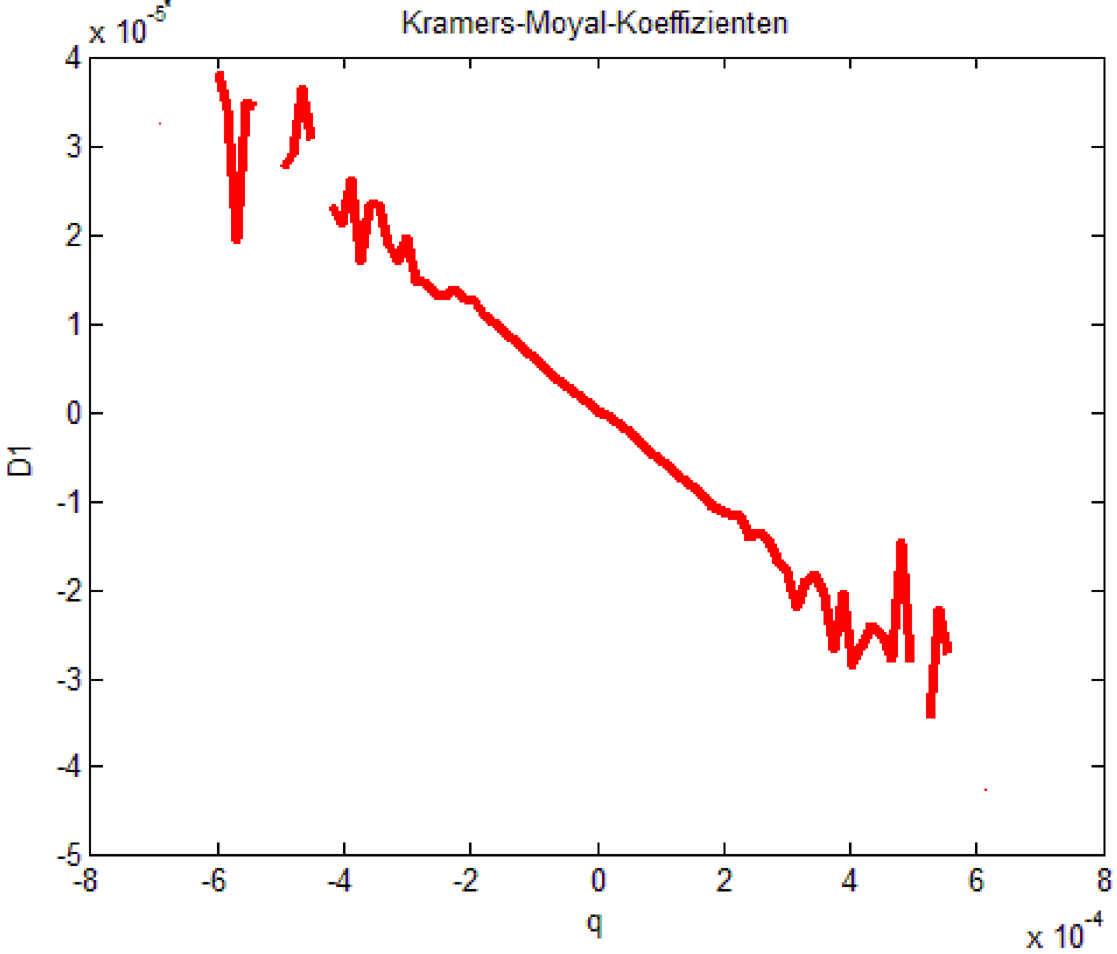
$p(q_3, t_3 | q_2, t_2; q_1 = 0, t_1)$

$p(q_3, t_3 | q_2, t_2)$

$t_3 = 3min, t_2 = 2min, t_1 = 1min$

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen

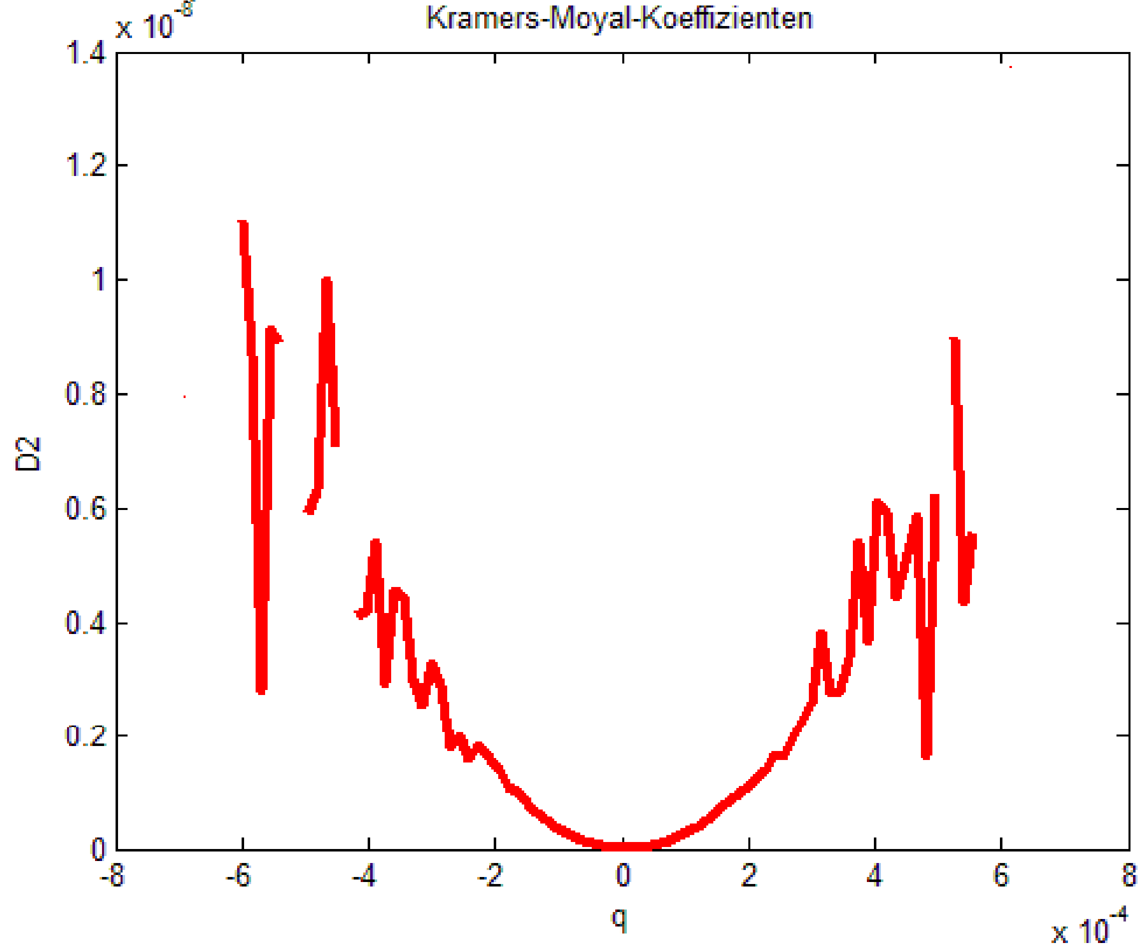
$$\frac{\partial}{\partial t} q(t) = D^{(1)}(q,t) + \sqrt{D^{(2)}(q,t)} \cdot F(t)$$



$$D^{(n)}(q,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t}{\Delta t \cdot n!} \cdot \left\langle \left(q(t+\Delta t) - q(t) \right)^n \middle| q(t) \right\rangle$$

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen

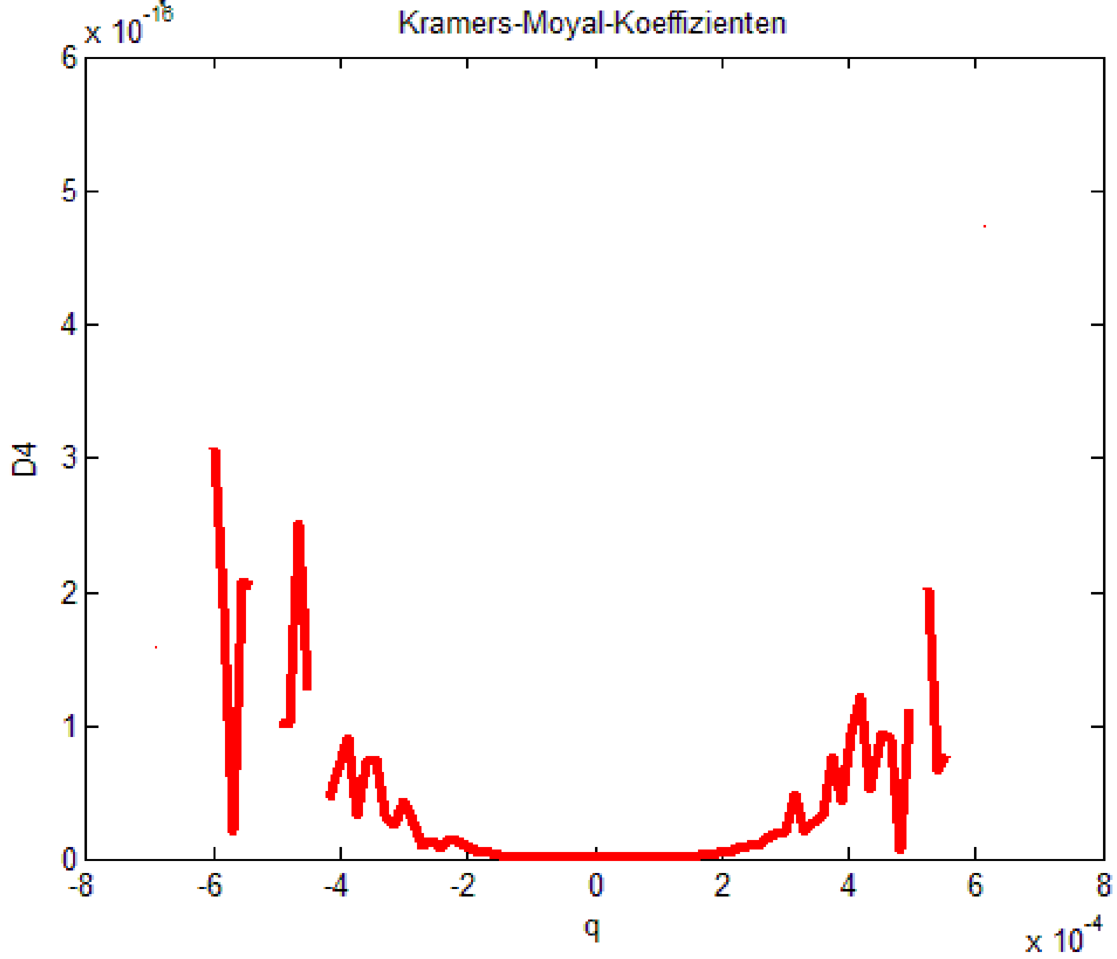
$$\frac{\partial}{\partial t} q(t) = D^{(1)}(q,t) + \sqrt{D^{(2)}(q,t) \cdot F(t)}$$



$$D^{(n)}(q,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t}{\Delta t \cdot n!} \cdot \left\langle \left(q(t+\Delta t) - q(t)\right)^n \middle| q(t) \right\rangle$$

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t) = D^{(1)}(q,t) + \sqrt{D^{(2)}(q,t) \cdot F(t)}$$



$$D^{(n)}(q,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t}{\Delta t \cdot n!} \cdot \left\langle \left(q(t+\Delta t) - q(t)\right)^n \middle| q(t) \right\rangle$$

Agenda

Einführung

Theorie der Markov-Prozesse

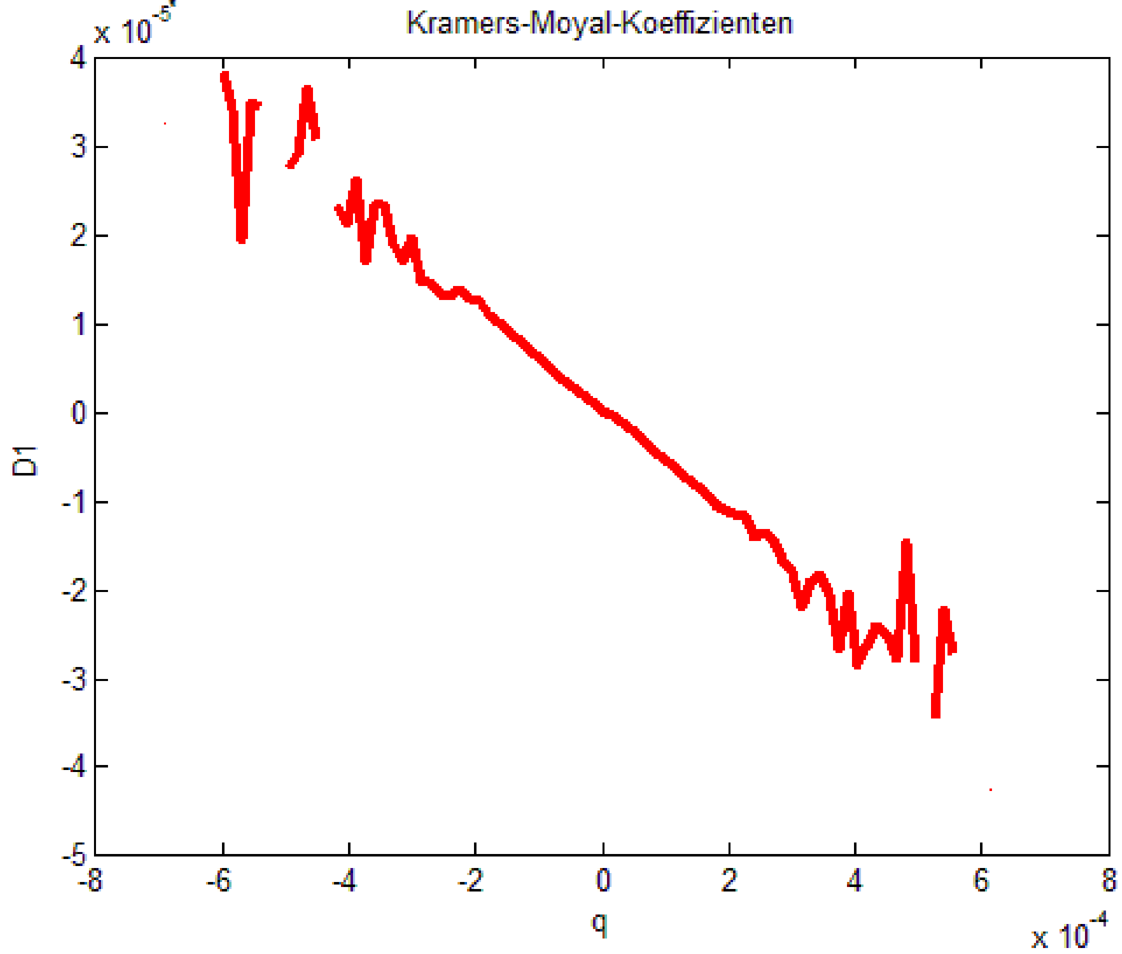
Vorstellung des Datensatzes

Schätzung von Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung für DAX-Kursdifferenzen

Fazit

Fazit

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t) = D^{(1)}(q,t) + \sqrt{D^{(2)}(q,t)} \cdot F(t)$$



Wichtigstes Ergebnis: Je weiter die Renditen ausgelenkt werden, desto stärker treibt sie der Driftterm in die entgegengesetzte Richtung

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster